

PRIMERA EDICIÓN

ANÁLISIS DE EDIFICIOS USANDO MATLAB®



MIGUEL RAÚL GUZMÁN PRADO Y RAUL FRANCO GUZMÁN LÓPEZ

ANÁLISIS DE EDIFICIOS USANDO MATLAB®

ING. MIGUEL RAÚL GUZMÁN PRADO
INGENIERO CIVIL

ING. RAUL FRANCO GUZMÁN LÓPEZ
INGENIERO CIVIL

CON BASE EN LO DESARROLLADO EN EL INSTITUTO DE
INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA COMO PARTE DE LOS
REQUERIMIENTOS PARA EL DICTADO DEL CURSO:

ANÁLISIS DE EDIFICIOS USANDO MATLAB® Y SIMULINK®

2018

DOCENTES:

ING. MIGUEL RAÚL GUZMÁN PRADO

ING. RAÚL FRANCO GUZMÁN LÓPEZ

ACEPTADO POR:

DR. ING. MIGUEL ÁNGEL TORRES MATOS

DIRECTOR DEL INSITUTO DE INVESTIGACIÓN DE LA FACULTAD DE
INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Análisis de Edificios Usando Matlab®

Autores:

© Miguel Raúl Guzmán Prado

© Raul Franco Guzmán López

Editado por:

© Miguel Raúl Guzmán Prado

Jr. San Martín 433 - Ayacucho

Teléfono: 999153315

miguelLraul123456@hotmail.com

Ayacucho - Perú

Primera edición digital - Abril 2022

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 2022-03664

ISBN: 978-612-00-7651-4

Libro electrónico disponible en <https://miguelraul13579.wixsite.com/misitio>

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro, por cualquier medio, sin previa autorización de los autores.

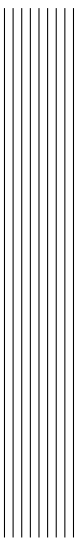
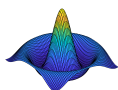
SOBRE LOS AUTORES

MIGUEL RAÚL GUZMÁN PRADO

Maestro en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural por la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI-Perú). Miembro del Grupo de Investigación de Mecánica Computacional de la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería. Especialista en el desarrollo de aplicaciones del software Matlab® y Simulink® para Ingeniería Estructural (Análisis Matricial de Estructuras, Dinámica Estructural, Elementos Finitos, Análisis de Edificios, Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado, Diseño de Estructuras de Acero, Estática y Mecánica de Materiales).

RAUL FRANCO GUZMÁN LÓPEZ

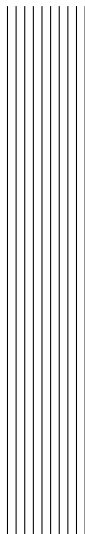
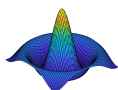
Egresado de la Maestría en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural por la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI-Perú). Miembro del Grupo de Investigación de Mecánica Computacional de la Facultad de Ingeniería Civil del Instituto de Investigación de la Universidad Nacional de Ingeniería. Especialista en el desarrollo de aplicaciones del software Matlab® y Simulink® para Ingeniería Estructural (Análisis Matricial de Estructuras, Dinámica Estructural, Elementos Finitos, Análisis de Edificios, Diseño de Estructuras de Concreto Reforzado, Diseño de Estructuras de Acero, Estática y Mecánica de Materiales).



Dedicatoria

A Dios por guiarme y protegerme en todo el camino. A mis padres Consuelo Prado Osorio y Raúl Guzmán Aparco. A Delia Prado Osorio y Flor de Isabel Prado Osorio por su apoyo incondicional hasta el final. A mis demás familiares y a todas las personas que de alguna u otra manera forman parte en mi proceso de aprendizaje.

A mis padres Gustavo y Liliana, por su gran apoyo y comprensión. A mis tres hermanos Daniela, Alejandra y Gustavo, motores de mi superación día a día.



Agradecimientos

Al Instituto de Investigación de la Facultad de Ingeniería Civil (IIFIC) de la Universidad Nacional de Ingeniería y, en especial al Jefe del IIFIC, al Dr. Miguel Ángel Torres Matos por la confianza otorgada y el soporte brindado a través del dictado del curso “Análisis de Edificios usando MATLAB[®] y SIMULINK[®]”; el cual ha sido la base de este libro.

A los docentes de la Escuela de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería, en particular a los de la Maestría en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural, quienes con sus valiosas enseñanzas colaboraron con nuestra formación profesional.

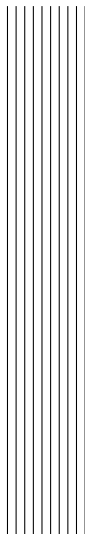
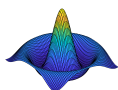
A la empresa MathWorks[®] y sus productos MATLAB[®] y SIMULINK[®], softwares y entornos de programación visual comprometidos con el desarrollo científico; así como también, a la comunidad de usuarios que usan el software L^AT_EX en la redacción de textos científicos, al grupo distribuidor de “MikTeX” y a los creadores de “WinEdt”. Debido a que MATLAB[®], SIMULINK[®] y L^AT_EX han participado tanto en la elaboración como en el desarrollo del contenido de este libro.

SOCIEDAD DE PROGRAMACIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL
USANDO MATLAB[®] Y SIMULINK[®]

Lima, Abril del 2022

Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado

Ing. Raúl Franco Guzmán López



Introducción

La finalidad de este libro es mostrar a los lectores una nueva perspectiva en la comprensión y desarrollo del análisis y modelamiento de edificios convencionales haciendo uso de la programación computacional a través del software MATLAB®. Con lo cual se espera impulsar el interés del lector en la implementación de MATLAB® entre una de sus principales herramientas de trabajo.

Contenido del libro:

El *capítulo 1* describe el desarrollo numérico de la ecuación de equilibrio de pórticos bidimensionales considerando la excitación sísmica.

El *capítulo 2* exhibe la formulación de la matriz de rigidez de un muro y el ensamblaje de la matriz de rigidez de un pórtico.

El *capítulo 3* suministra la formulación y construcción, en código fuente de MATLAB®, de la matriz de rigidez de pórticos con muros acoplados.

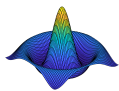
El *capítulo 4* expone los resultados del desarrollo numérico de la ecuación de equilibrio de pórticos con muros acoplados considerando la excitación sísmica.

El *capítulo 5* desarrolla definiciones básicas de vibración libre y respuesta a excitaciones armónicas y periódicas.

El *capítulo 6* entrega el desarrollo, matemático y en código fuente de MATLAB®, del análisis modal de edificios.

El *capítulo 7* refiere el desarrollo, en código fuente de MATLAB®, de espectros de respuesta y de los desplazamientos y velocidades obtenidos a partir de un registro de aceleraciones del suelo.

El *capítulo 8* ofrece la formulación y desarrollo, en código fuente de MATLAB®, del análisis de un sistema bidimensional con aislamiento en la base.



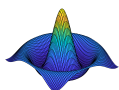
El *capítulo 9* provee la formulación y desarrollo, en código fuente de MATLAB®, del análisis modal de un sistema pseudo tridimensional.

SOCIEDAD DE PROGRAMACIÓN EN INGENIERÍA ESTRUCTURAL
USANDO MATLAB® Y SIMULINK®

Lima, Abril del 2022

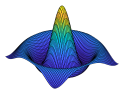
Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado

Ing. Raúl Franco Guzmán López

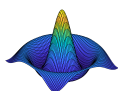


Índice general

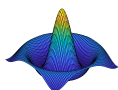
Portada	I
Dedicatoria	IV
Agradecimientos	V
Resumen	VI
Índice general	VIII
Índice de tablas	XI
Índice de figuras	XII
1. Modelamiento y análisis de pórticos bidimensionales usando MATLAB®	1
1.1. Introducción	1
1.2. Pórtico bidimensional de un piso	1
1.2.1. Ejemplo: Pórtico de 1 piso	2
1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros	8
1.3.1. Ejemplo: Pórtico de 3 pisos	10
1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos	14
1.4.1. Ejemplo: Pórtico de 10 pisos	15
2. Matriz de rigidez de un muro y ensamblaje de la matriz de rigidez de un pórtico	20
2.1. Introducción	20
2.2. Matriz de rigidez de un elemento tipo muro	20
2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez	23
2.3.1. Primer paso	23
2.3.2. Segundo paso	24



2.3.3. Tercer paso	25
2.3.4. Cuarto paso	27
3. Matriz de rigidez de pórticos bidimensionales con muros acoplados usando MATLAB®	29
3.1. Introducción	29
3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros	29
3.2.1. Masa	30
3.2.2. Matriz de rigidez lateral	30
3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros	36
3.3.1. Matriz de masas	37
3.3.2. Matriz de rigidez y matriz de rigidez lateral	37
3.3.3. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh y Caughey	41
3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros	41
3.4.1. Matriz de masa	42
3.4.2. Matriz de rigidez lateral	42
3.4.3. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh y Caughey	50
4. Modelamiento y análisis de pórticos bidimensionales con muros acoplados usando MATLAB®	51
4.1. Introducción	51
4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros	51
4.3. Pórtico de 3 pisos con muros	57
4.4. Pórtico de 10 pisos con muros	61
5. Vibración libre	67
5.1. Introducción	67
5.2. Vibración libre	67
5.3. Problema de valores característicos	68
5.3.1. Normalización de los modos de forma	69
6. Análisis modal usando MATLAB®	71
6.1. Introducción	71
6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre	71
6.2.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema en vibración libre (2 pisos)	71
6.2.2. Ejemplo: Análisis modal de un sistema en vibración libre (2 pisos)	75
6.2.3. Ejemplo: Análisis modal de un sistema en vibración libre (5 pisos)	80
6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada	84
6.3.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema no amortiguado en vibración forzada (2 pisos)	84
6.3.2. Ejemplo: Análisis modal de un sistema no amortiguado en vibración forzada (2 pisos)	86
6.3.3. Ejemplo: Análisis modal de un sistema no amortiguado en vibración forzada (5 pisos)	91
6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada	95
6.4.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema amortiguado en vibración forzada (2 pisos)	95

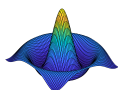


6.4.2.	Ejemplo: Análisis modal de un sistema amortiguado en vibración forzada (2 pisos)	98
6.4.3.	Ejemplo: Análisis modal de un sistema amortiguado en vibración forzada (5 pisos)	103
7.	Desplazamientos y velocidades obtenidos del registro de aceleraciones del suelo y espectros de respuesta usando MATLAB®	108
7.1.	Introducción	108
7.2.	Velocidad y desplazamiento del registro sísmico	108
7.2.1.	Ejemplo: Velocidad y desplazamiento del registro sísmico	108
7.3.	Espectros de respuestas	111
7.3.1.	Ejemplo: Espectros de respuesta	111
8.	Análisis plano con aislamiento en la base	117
8.1.	Introducción	117
8.2.	Aislamiento en edificios	117
8.3.	Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento	119
8.3.1.	Ejemplo: Pórtico con aislamiento en la base (4 pisos)	120
9.	Análisis modal pseudo-tridimensional	133
9.1.	Introducción	133
9.2.	Análisis modal sísmico	133
9.3.	Modelo pseudo-tridimensional	135
9.4.	Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional	137
9.4.1.	Ejemplo: Análisis pseudo tridimensional en edificio de 5 pisos	142
	Bibliografía	156
	ANEXOS	158
	A. Sismo de Pisco del 15/08/2007	159



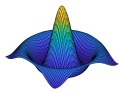
Índice de tablas

3.1. Matriz de ingreso data1 (Pórtico de 1 piso con muros).	30
3.2. Matriz de ingreso data2 (Pórtico de 1 piso con muros).	31
3.3. Matriz de ingreso data3 (Pórtico de 1 piso con muros).	31
3.4. Matriz de ingreso data4 (Pórtico de 1 piso con muros).	31
3.5. Matriz de ingreso data5 (Pórtico de 1 piso con muros).	32
3.6. Matriz de ingreso data1 (Pórtico de 3 pisos con muros).	38
3.7. Matriz de ingreso data2 (Pórtico de 3 pisos con muros).	38
3.8. Matriz de ingreso data3 (Pórtico de 3 pisos con muros).	38
3.9. Matriz de ingreso data4 (Pórtico de 3 pisos con muros).	39
3.10. Matriz de ingreso data5 (Pórtico de 3 pisos con muros).	39
3.11. Matriz de ingreso data1 (Pórtico de 10 pisos con muros).	43
3.12. Matriz de ingreso data2 (Pórtico de 10 pisos con muros).	44
3.13. Matriz de ingreso data3 (Pórtico de 10 pisos con muros).	46
3.14. Matriz de ingreso data4 (Pórtico de 10 pisos con muros).	46
3.15. Matriz de ingreso data5 (Pórtico de 10 pisos con muros).	48
9.1. Coordenadas iniciales y ángulos de orientación de los pórticos bidimensionales.	139
9.2. Valores r_i de los pórticos bidimensionales.	140
A.1. Registro de aceleraciones del sismo de Pisco.	163

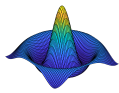


Índice de figuras

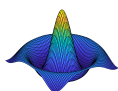
1.1. Pórtico de 1 piso.	1
1.2. Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	6
1.3. Modelo del pórtico de 1 piso.	6
1.4. Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	7
1.5. Historiales de desplazamientos.	7
1.6. Historiales de velocidades.	7
1.7. Historiales de aceleraciones.	7
1.8. Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	8
1.9. Pórtico de 3 pisos.	8
1.10. Modelo del pórtico de 3 pisos.	11
1.11. Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	12
1.12. Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	12
1.13. Historiales de desplazamientos.	12
1.14. Historiales de velocidades.	13
1.15. Historiales de aceleraciones.	13
1.16. Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	14
1.17. Pórtico de 10 pisos.	14
1.18. Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	17
1.19. Modelo del pórtico de 10 pisos.	17
1.20. Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	17
1.21. Historiales de desplazamientos.	18
1.22. Historiales de velocidades.	18
1.23. Historiales de aceleraciones.	19
1.24. Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	19
2.1. Fuerzas y momentos de una viga en el plano.	20
2.2. Condiciones de contorno debido a un desplazamiento unitario en A.	21
2.3. Condiciones de contorno obtenidas por desplazamientos unitarios (a y b) y por giros unitarios (c y d) en los extremos de la viga.	23



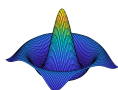
2.4.	Posibles grados de libertad de un mismo pórtico bidimensional.	23
2.5.	Viga de sección constante que no considera efectos de corte.	24
2.6.	Viga de sección constante que no considera efectos de corte (axialmente rígida).	24
2.7.	Columna, sin considerar efectos de corte.	24
2.8.	Columna, sin considerar efectos de corte (axialmente rígida).	25
2.9.	Sistema de coordenadas locales y globales.	26
2.10.	Procedimiento de ensamblaje de la matriz de rigidez.	28
3.1.	Pórtico de 1 piso con muros.	29
3.2.	Discretización del pórtico de 1 piso con muros.	30
3.3.	Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 1 piso con muros).	36
3.4.	Discretización de la estructura (Pórtico de 1 piso con muros).	36
3.5.	Pórtico de 3 pisos con muros.	36
3.6.	Discretización del de 3 pisos con muros.	37
3.7.	Discretización de la estructura (Pórtico de 3 pisos con muros).	40
3.8.	Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 3 pisos con muros).	41
3.9.	Pórtico de 10 pisos con muros.	41
3.10.	Discretización del pórtico de 10 pisos con muros.	42
3.11.	Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 10 pisos con muros).	49
3.12.	Discretización de la estructura (Pórtico de 10 pisos con muros).	49
4.1.	Pórtico de 1 piso con muros.	51
4.2.	Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	55
4.3.	Modelo del pórtico de 1 piso con muros.	55
4.4.	Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	56
4.5.	Historiales de desplazamientos.	56
4.6.	Historiales de velocidades.	56
4.7.	Historiales de aceleraciones.	56
4.8.	Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	57
4.9.	Pórtico de 3 pisos con muros.	57
4.10.	Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	59
4.11.	Modelo del pórtico de 3 pisos con muros.	59
4.12.	Historiales de desplazamientos.	59
4.13.	Historiales de velocidades.	60
4.14.	Historiales de aceleraciones.	60
4.15.	Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	61
4.16.	Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	61
4.17.	Pórtico de 10 pisos con muros.	62
4.18.	Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	63
4.19.	Modelo del pórtico de 10 pisos con muros.	64
4.20.	Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	64
4.21.	Historiales de desplazamientos.	64
4.22.	Historiales de velocidades.	65
4.23.	Historiales de aceleraciones.	65
4.24.	Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	66
5.1.	Modelo simplificado de corte de edificio de 4 niveles.	68



6.1. Pórtico bidimensional de 2 niveles.	72
6.2. Diagramas modales.	78
6.3. Historiales de desplazamientos y velocidades en forma tabular.	79
6.4. Historiales de desplazamientos y velocidades.	79
6.5. Modelo del pórtico de 2 pisos.	79
6.6. Pórtico de 5 pisos.	80
6.7. Historiales de desplazamientos y velocidades.	81
6.8. Historiales de desplazamientos y velocidades.	82
6.9. Diagramas modales.	83
6.10. Modelo del pórtico de 5 pisos.	83
6.11. Pórtico bidimensional de 2 niveles con fuerzas laterales en sus entrepisos. . .	84
6.12. Historiales de respuestas en forma tabular.	90
6.13. Historiales de desplazamientos y velocidades.	90
6.14. Modelo del pórtico de 2 pisos.	90
6.15. Diagramas modales.	91
6.16. Estructura a ser sometida en vibración forzada sin amortiguamiento.	92
6.17. Modelo del pórtico de 5 pisos.	93
6.18. Historiales de respuestas en forma tabular.	93
6.19. Historiales de desplazamientos y velocidades.	94
6.20. Diagramas modales.	95
6.21. Pórtico de 2 pisos con fuerzas laterales en sus entrepisos.	96
6.22. Modelo del pórtico de 2 pisos.	102
6.23. Historiales de respuestas en forma tabular.	102
6.24. Historiales de desplazamientos y velocidades.	102
6.25. Diagramas modales.	103
6.26. Pórtico bidimensional de 5 niveles con fuerzas laterales en sus entrepisos. . .	104
6.27. Diagramas modales.	105
6.28. Historiales de desplazamientos y velocidades.	106
6.29. Historiales de respuestas en forma tabular.	107
6.30. Modelo del pórtico de 5 pisos.	107
7.1. Historiales registrados en forma tabular.	110
7.2. Historial de aceleraciones registradas.	110
7.3. Historial de velocidades registradas.	111
7.4. Historial de desplazamientos registrados.	111
7.5. Aceleración registrada con corrección de línea base.	115
7.6. Historiales de espectros de respuesta en forma tabular.	115
7.7. Espectros de desplazamientos.	115
7.8. Espectros de pseudo-velocidades.	116
7.9. Espectros de pseudo-aceleraciones.	116
8.1. Sistemas estructurales sin y con aislamiento de base.	117
8.2. Pórtico bidimensional con aislamiento de base.	119
8.3. Modelo de pórtico con aislamiento.	130
8.4. Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	130
8.5. Historiales de respuesta en forma tabular.	130
8.6. Historiales de desplazamientos y velocidades.	131
8.7. Historiales de aceleraciones.	132



8.8. Derivas de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	132
9.1. Ilustración del ángulo de compatibilidad de deformaciones α_i en la dirección u_i	135
9.2. Pórtico tridimensional.	138
9.3. Vista en planta del pórtico tridimensional.	138
9.4. Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.	153
9.5. Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.	153
9.6. Modelo del edificio tridimensional.	153
9.7. Historiales de desplazamientos y velocidades.	154
9.8. Historiales de aceleraciones.	155
9.9. Derivas de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.	155



1. Modelamiento y análisis de pórticos bidimensionales usando MATLAB®

1.1. Introducción

En este capítulo se expone minuciosamente el procedimiento matemático del desacoplamiento y desarrollo de las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico de pórticos bidimensionales sometidos a una excitación sísmica. Cada pórtico es idealizado como un modelo simplificado de viga en voladizo; dicho modelo sólo considera 1 grado de libertad (g.d.l.) horizontal por nivel. Los resultados alcanzados corresponden a historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones; así como también, relaciones de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y una visualización interactiva en tiempo real de los desplazamientos ocasionados en los pórticos.

1.2. Pórtico bidimensional de un piso

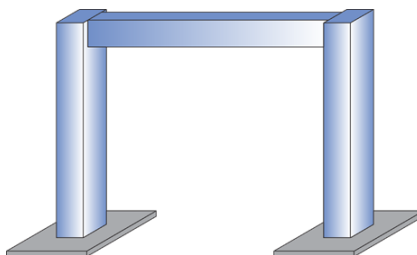


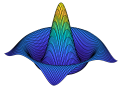
Figura 1.1: Pórtico de 1 piso.

La ecuación de equilibrio dinámico del sistema sometido a excitación sísmica ($\ddot{u}_g$) se representa en 1.1a. Dicha ecuación tiene por equivalentes a las ecuaciones 1.1b y 1.1c.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) = -m\ddot{u}_g \quad (1.1a)$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = -\ddot{u}_g \quad (1.1b)$$

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n\dot{u} + \omega_n^2u = -\ddot{u}_g \quad (1.1c)$$



1.2. Pórtico bidimensional de un piso

Con el fin de desacoplar la ecuación de equilibrio dinámico del sistema se utiliza del método de reducción de orden; el cual admite pasar de n ecuaciones de segundo grado a un conjunto de $2n$ ecuaciones de primer grado. De esta manera, el desarrollo se vuelve sencillo, ya que, es con base en ecuaciones de primer grado.

El pórtico de la figura 1.1 sólo cuenta con un grado de libertad horizontal (modelo simplificado de viga en voladizo); por lo tanto, se requiere hacer un cambio de dos variables en el procedimiento de la reducción de orden. Dicho procedimiento inicia designando las variables, en este caso x_1 y x_2 , y presentando las siguientes igualdades: 1.2a y 1.2b.

$$x_1 = u \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{u} \quad (1.2a)$$

$$x_2 = \dot{u} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{u} \quad (1.2b)$$

Posteriormente, se tiene una equivalencia en términos de las variables designadas (expresión 1.3a) y se establece la ecuación de equilibrio dinámico en función de las igualdades presentadas (ecuación 1.3b).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.3a)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_n^2 x_1 - 2\xi\omega_n x_2 - \ddot{u}_g \quad (1.3b)$$

Por último, los arreglos matriciales mostrados en las ecuaciones 1.4a y 1.4b se logran a partir de las relaciones determinadas entre las derivadas de las variables designadas ($\dot{x}_1$ y $\dot{x}_2$) y entre el desplazamiento, velocidad y aceleración del único grado de libertad del sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{u}_g \quad (1.4a)$$

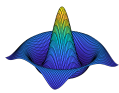
$$y = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \ddot{u}_g \quad (1.4b)$$

En consecuencia, se ha convertido una ecuación de segundo orden a un conjunto de dos ecuaciones de primer orden.

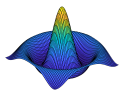
1.2.1. Ejemplo: Pórtico de 1 piso

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 1.1; donde la masa concentrada del único piso es $m = 21.63 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, la rigidez $k = 23479.8223 \text{ KN/m}$ y la fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.05$. Las columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes y tienen una altura de 4.00 m ; las dimensiones de las secciones transversales son $0.50 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en columnas y $0.30 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E = 21316773.9449 \text{ kN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007 (Ver A).

Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis correspondiente se refiere al código fuente mostrado en el siguiente script:

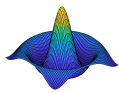


```
1 % Análisis tiempo historia de un pórtico bidimensional de un piso sin
2 % muros. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing Raul Franco Guzmán
3 % López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural de
4 % la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Masa, coeficiente de amortiguamiento y rigidez.
8 m=21.63;
9 k=23479.8223;
10 epsilon=0.05;
11 % Cálculo de la matriz A
12 A=[0 1; -k/m -2*epsilon*sqrt(k/m)];
13 % Cálculo de la matriz B
14 B=[0; -1];
15 % Cálculo de la matriz C
16 C=[1 0; 0 1; -k/m -2*epsilon*sqrt(k/m)];
17 % Cálculo de la matriz D
18 D=[0; 0; -1];
19 % Componente de la aceleración del suelo registrada
20 load('Ica.txt')
21 t=Ica(:,1);
22 u=Ica(:,3)/100;
23 % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales
24 x0=[0.00 0.00];
25 sys=ss(A,B,C,D);
26 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
27 % Visualización numérica de los resultados.
28 f=figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ↵
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 485 300]);
29 cnames={'t','x1','v1','a1'};
30 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '↵
    Position',[82.5 25 320 255]);
31 % Registro de aceleración del suelo
32 figure('Name','Registro de aceleraciones del suelo','NumberTitle','off',↵
    'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
33 subplot(2,1,1)
34 set(gcf,'Color','w');
35 set(gca,'Color','w');
36 plot(t,u,'Color',[0.87 0.49 0],'LineWidth',0.5)
37 xlim([0 t(end),1])
38 get(gca, 'XTick');
39 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
40 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo','FontSize',24, 'FontName'↵
    , 'Century', 'FontWeight', 'bold')
41 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20, 'FontName', 'Century')
42 ylabel('Aceleración del suelo (m/s^2)','FontSize',20, 'FontName', 'Century'↵
    ')
43 grid on
44 lgd=legend('Sismo de Pisco');
45 lgd.FontSize=20;
46 lgd.FontName='Century';
47 set(gca, 'GridAlpha',0.40);
48 % Historiales de desplazamientos
49 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','NumberTitle','off', '↵
    units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
50 subplot(2,1,1)
```

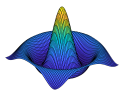


1.2. Pórtico bidimensional de un piso

```
51 set(gcf,'Color','w');
52 set(gca,'Color','w');
53 plot(t,y(:,1),'Color','b','LineWidth',0.5)
54 get(gca,'XTick');
55 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
56 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','Century',↵
    'Century','FontWeight','bold')
57 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
58 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
59 grid on
60 xlim([0 t(end,1)])
61 lgd=legend('Primer piso');
62 lgd.FontSize=20;
63 lgd.FontName='Century';
64 set(gca,'GridAlpha',0.40);
65 % Historiales de velocidades
66 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Velocidad','NumberTitle','off','units',↵
    'normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
67 subplot(2,1,1)
68 set(gcf,'Color','w');
69 set(gca,'Color','w');
70 plot(t,y(:,2),'Color','r','LineWidth',0.5)
71 get(gca,'XTick');
72 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
73 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad','FontSize',24,'FontName','Century',↵
    'FontWeight','bold')
74 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
75 ylabel('Velocidad (m/s)','FontSize',20,'FontName','Century')
76 grid on
77 xlim([0 t(end,1)])
78 lgd=legend('Primer piso');
79 lgd.FontSize=20;
80 lgd.FontName='Century';
81 set(gca,'GridAlpha',0.40);
82 % Historiales de aceleraciones
83 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Aceleración','NumberTitle','off','units',↵
    'normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
84 subplot(2,1,1)
85 set(gcf,'Color','w');
86 set(gca,'Color','w');
87 plot(t,y(:,3),'Color','g','LineWidth',0.5)
88 get(gca,'XTick');
89 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
90 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century',↵
    'FontWeight','bold')
91 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
92 ylabel('Aceleración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
93 grid on
94 xlim([0 t(end,1)])
95 lgd=legend('Primer piso');
96 lgd.FontSize=20;
97 lgd.FontName='Century';
98 set(gca,'GridAlpha',0.40);
99 % Relaciones de distorsiones de entrepiso
100 hor(2)=max(abs([min(y(:,1)) max(y(:,1))]))/4;
101 hor(1)=0;
102 figure('Name','Relaciones de distorsiones de entrepiso','NumberTitle',↵
```



```
        off','Position',[625 100 575 750])
103 set(gca,'Color','w')
104 set(gcf,'Color','w')
105 x=hor;
106 st=0:1;
107 yy=0:0.001:max(st);
108 xx=interp1(st,x,yy,'pchip');
109 plot(xx,yy,'Color',rand(3,1),'LineWidth',2)
110 title('Distorsión de entrepisos','FontName','Century','FontSize',20)
111 xlabel('Distorsión de entrepiso','FontSize',20,'FontName','Century')
112 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century')
113 hold on
114 grid on
115 set(gca,'GridAlpha',0.40);
116 % Visualización interactiva del historial de desplazamientos
117 figure('Name','Visualización interactiva de desplazamientos','↵
        NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
118 set(gcf,'Color','w')
119 set(gca,'Color','w','Visible','off')
120 axis tight
121 x1=100*y(:,1);
122 for q=1:length(x1)
123     y1=4*ones(1,length(x1));
124     plot3([x1(q) 5+x1(q)],[0 0],[y1(q) y1(q)],'Color','r','LineWidth',5)
125     hold on
126     set(gca,'Color','w','Visible','off')
127     plot3([0 x1(q)],[0 0],[0 y1(q)],[5 5+x1(q)],[0 0],[0 y1(q)],'Color','b↵
        ','LineWidth',5)
128     fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75],[-0.75 0.75 0.75 -0.75],[0 0 0 0],'g')
129     fill3([4.25 4.25 5.75 5.75],[-0.75 0.75 0.75 -0.75],[0 0 0 0],'g')
130     axis equal
131     axis([-5.5 10.5 -1 1 0 4.05])
132     drawnow
133     pause(0.0125)
134     hold off
135 end
136 % Cálculo para cortante máximo
137 fc=k*y(:,1)';
138 calc1=length(y(:,1));
139 for i=1:calc1
140     calc2(i)=sum(fc(:,i));
141 end
142 if abs(min((calc2)))>abs(max((calc2)))
143     [a,ub]=min(calc2);
144 else
145     [a,ub]=max(calc2);
146 end
147 de(1)=y(ub,1);
148 f=k*abs(de)';
149 f(1)=sum(f);
150 % Fuerzas Cortantes
151 figure('Name','Fuerza Cortante','NumberTitle','off','Position',[625 100 ↵
        575 750])
152 set(gca,'Color','w')
153 set(gcf,'Color','w')
154 fill([0 f(1) f(1) 0],[0 0 1 1],'b')
155 alpha(0.4)
```



1.2. Pórtico bidimensional de un piso

```
156 title('Fuerza Cortante','FontName','Century','FontSize',20)
157 xlabel('Fuerza Cortante (kN)','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
158 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
159 hleg=legend('Fuerza Cortante','Location','NorthEast');
160 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
161 hold on
162 grid on
163 set(gca,'GridAlpha',0.40);
164 % Momentos flexionantes
165 figure('Name','Momento Flexionante','NumberTitle','off','Position',[625 100 575 750])
166 set(gca,'Color','w')
167 set(gcf,'Color','w')
168 m(1)=f(1)*4;
169 fill([0 m(1) 0],[0 0 1],'r')
170 alpha(0.4)
171 title('Momento flexionante','FontName','Century','FontSize',20)
172 xlabel('Momento flexionante (kN-m)','FontSize',20,'FontName','Century')
173 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century')
174 hleg=legend('Momento Flexionante','Location','NorthEast');
175 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
176 hold on
177 grid on
178 set(gca,'GridAlpha',0.40);
```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 1.2) y una simulación visual de los desplazamientos ocasionados por el sismo (figura 1.3).

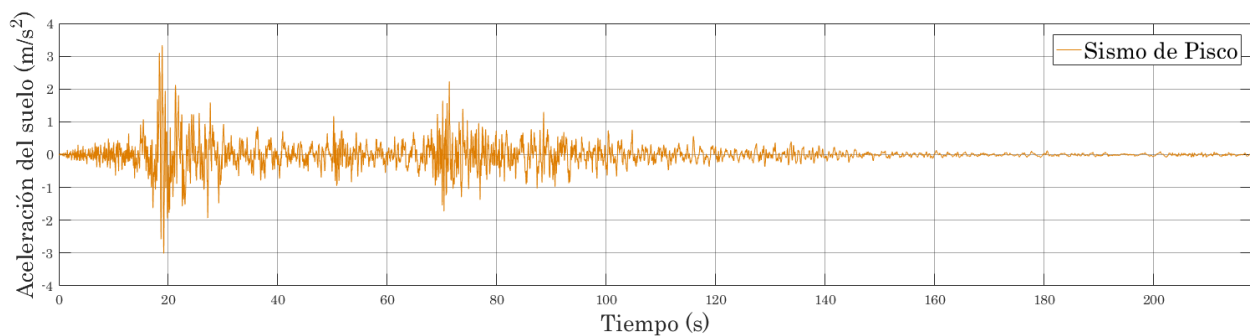


Figura 1.2: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

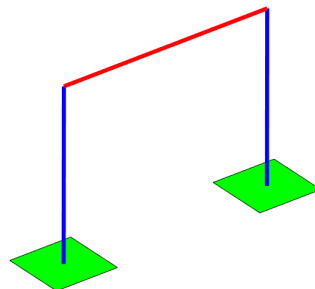
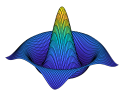


Figura 1.3: Modelo del pórtico de 1 piso.



1.2. Pórtico bidimensional de un piso

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 1.4) y gráficos (figuras 4.5, 4.6 y 4.7 respectivamente).

t	x1	v1	a1
0	4.9811e-24	-7.3925e-22	0.0071
0.0100	1.7945e-07	1.8472e-05	-0.0034
0.0200	1.3452e-07	-3.3369e-05	-0.0069
0.0300	-4.5708e-07	-7.6106e-05	-0.0016
0.0400	-1.2208e-06	-6.8978e-05	0.0030
0.0500	-1.7989e-06	-5.0471e-05	6.9203e-04
0.0600	-2.3634e-06	-7.1728e-05	-0.0049
0.0700	-3.3944e-06	-1.4111e-04	-0.0089
0.0800	-5.2628e-06	-2.3360e-04	-0.0095
0.0900	-7.9752e-06	-2.9893e-04	-0.0035
0.1000	-1.0895e-05	-2.6080e-04	0.0110
0.1100	-1.2695e-05	-7.4354e-05	0.0259
0.1200	-1.2091e-05	1.9922e-04	0.0283

Figura 1.4: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

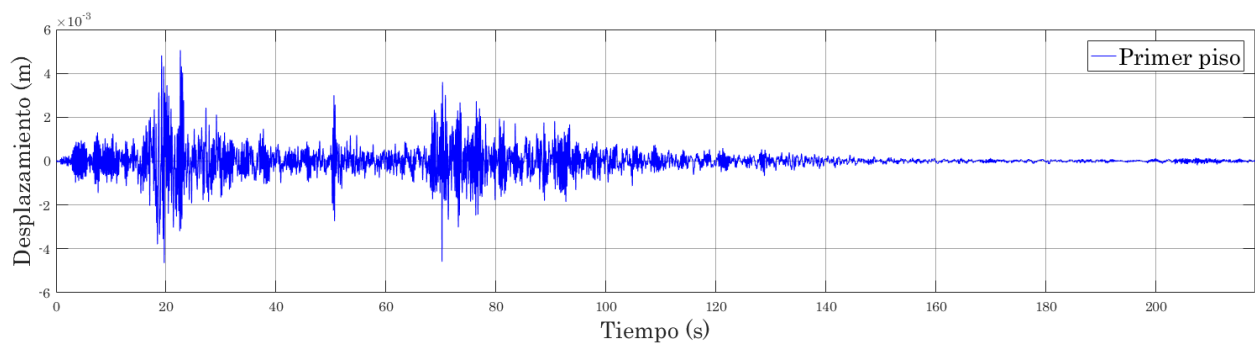


Figura 1.5: Historiales de desplazamientos.

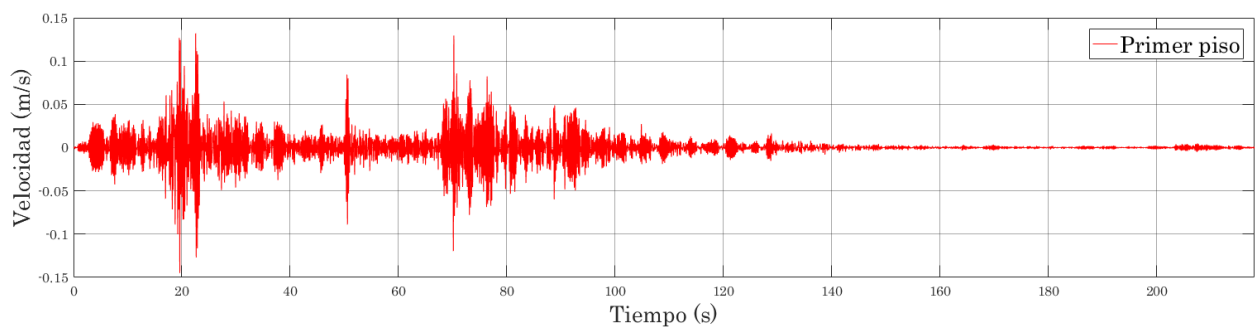


Figura 1.6: Historiales de velocidades.

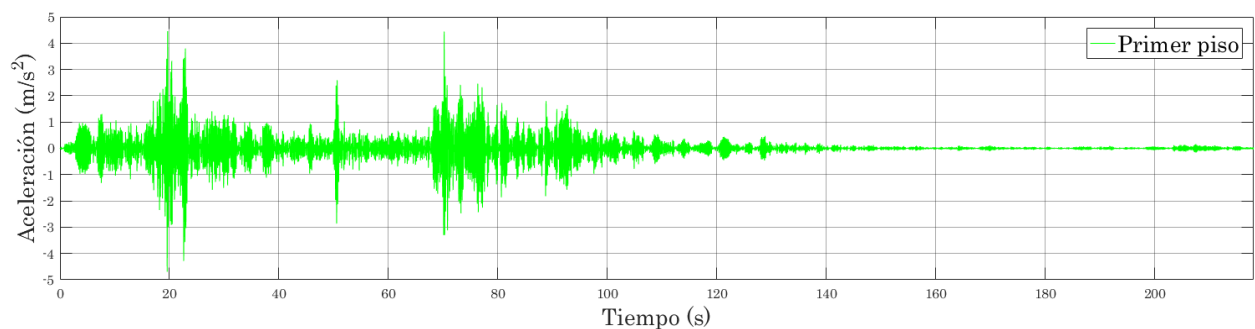
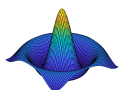


Figura 1.7: Historiales de aceleraciones.



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 4.8).

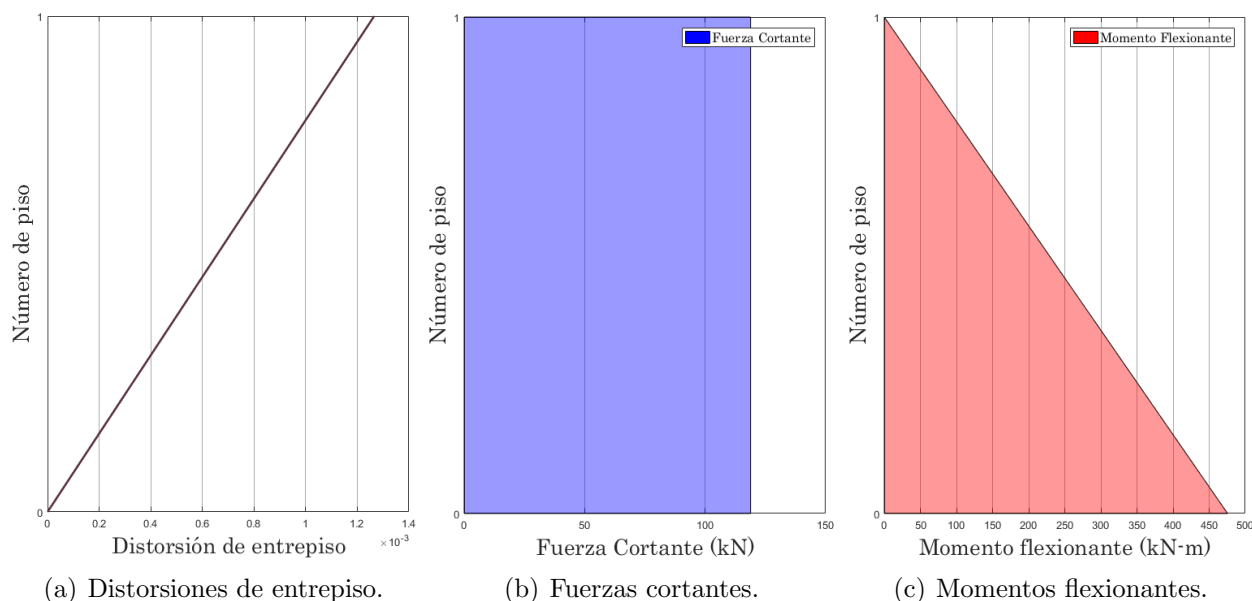


Figura 1.8: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

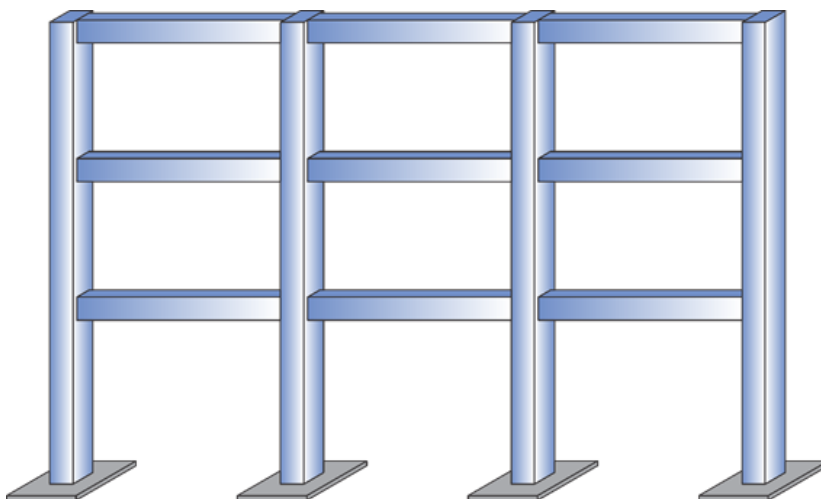
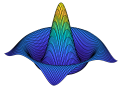


Figura 1.9: Pórtico de 3 pisos.

El desacoplamiento y desarrollo de la ecuación de equilibrio dinámico para este sistema sigue las mismas nociones que el de un piso. Se considera como base del planteamiento del sistema la ecuación 1.1a, la cual se muestra ahora en la ecuación 1.5 con otra notación simbólica para hacer alusión a vectores y matrices;

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$ y $\mathbf{1}$ representan a la matriz de masas, matriz de amortiguamiento, matriz de rigidez y vector columna con términos iguales a la unidad, respectivamente.



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

El pórtico de la figura 1.9 cuenta con tres grados de libertad horizontales; por lo tanto, la representación matricial de la ecuación 1.5 resulta ser la ecuación 1.6.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{u}_g \quad (1.6)$$

En esta situación, en primer lugar habrá que descomponer la ecuación matricial 1.6 en las ecuaciones 1.7a, 1.7b y 1.7c;

$$m_1 \ddot{u}_1 + c_{11} \dot{u}_1 + c_{12} \dot{u}_2 + c_{13} \dot{u}_3 + k_{11} u_1 + k_{12} u_2 + k_{13} u_3 = -m_1 \ddot{u}_g \quad (1.7a)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + c_{21} \dot{u}_1 + c_{22} \dot{u}_2 + c_{23} \dot{u}_3 + k_{21} u_1 + k_{22} u_2 + k_{23} u_3 = -m_2 \ddot{u}_g \quad (1.7b)$$

$$m_3 \ddot{u}_3 + c_{31} \dot{u}_1 + c_{32} \dot{u}_2 + c_{33} \dot{u}_3 + k_{31} u_1 + k_{32} u_2 + k_{33} u_3 = -m_3 \ddot{u}_g \quad (1.7c)$$

para luego, aplicar el procedimiento de reducción de orden de ecuaciones diferenciales. Trabajando con 3 grados de libertad será imprescindible designar seis variables, en este caso x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 y x_6 , y presentar las siguientes igualdades:

$$x_1 = u_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{u}_1 \quad x_2 = u_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{u}_2$$

$$x_3 = u_3 \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{u}_3 \quad x_4 = \dot{u}_1 \Rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{u}_1$$

$$x_5 = \dot{u}_2 \Rightarrow \dot{x}_5 = \ddot{u}_2 \quad x_6 = \dot{u}_3 \Rightarrow \dot{x}_6 = \ddot{u}_3$$

Posteriormente, se tienen equivalencias entre los términos de las variables designadas (expresiones 1.8a, 1.8b y 1.8c) y se establecen las ecuaciones de equilibrio dinámico del sistema en función de las igualdades propuestas (expresiones 1.8d, 1.8e y 1.8f).

$$\dot{x}_1 = x_4 \quad (1.8a)$$

$$\dot{x}_2 = x_5 \quad (1.8b)$$

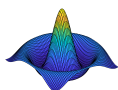
$$\dot{x}_3 = x_6 \quad (1.8c)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k_{11}}{m_1} x_1 - \frac{k_{12}}{m_1} x_2 - \frac{k_{13}}{m_1} x_3 - \frac{c_{11}}{m_1} x_4 - \frac{c_{12}}{m_1} x_5 - \frac{c_{13}}{m_1} x_6 - \ddot{u}_g \quad (1.8d)$$

$$\dot{x}_5 = -\frac{k_{21}}{m_2} x_1 - \frac{k_{22}}{m_2} x_2 - \frac{k_{23}}{m_2} x_3 - \frac{c_{21}}{m_2} x_4 - \frac{c_{22}}{m_2} x_5 - \frac{c_{23}}{m_2} x_6 - \ddot{u}_g \quad (1.8e)$$

$$\dot{x}_6 = -\frac{k_{31}}{m_3} x_1 - \frac{k_{32}}{m_3} x_2 - \frac{k_{33}}{m_3} x_3 - \frac{c_{31}}{m_3} x_4 - \frac{c_{32}}{m_3} x_5 - \frac{c_{33}}{m_3} x_6 - \ddot{u}_g \quad (1.8f)$$

Por último, los arreglos matriciales mostrados en las ecuaciones 1.9a y 1.9b se logran de las relaciones determinadas entre las derivadas de las variables designadas ($\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\dot{x}_4$, $\dot{x}_5$ y $\dot{x}_6$) y los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los tres grados de libertad del sistema.



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{11}}{m_1} & -\frac{k_{12}}{m_1} & -\frac{k_{13}}{m_1} & -\frac{c_{11}}{m_1} & -\frac{c_{12}}{m_1} & -\frac{c_{13}}{m_1} \\ -\frac{k_{21}}{m_2} & -\frac{k_{22}}{m_2} & -\frac{k_{23}}{m_2} & -\frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & -\frac{c_{23}}{m_2} \\ -\frac{k_{31}}{m_3} & -\frac{k_{32}}{m_3} & -\frac{k_{33}}{m_3} & -\frac{c_{31}}{m_3} & -\frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{u}_g \quad (1.9a)$$

$$y = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_{11}}{m_1} & -\frac{k_{12}}{m_1} & -\frac{k_{13}}{m_1} & -\frac{c_{11}}{m_1} & -\frac{c_{12}}{m_1} & -\frac{c_{13}}{m_1} \\ -\frac{k_{21}}{m_2} & -\frac{k_{22}}{m_2} & -\frac{k_{23}}{m_2} & -\frac{c_{21}}{m_2} & -\frac{c_{22}}{m_2} & -\frac{c_{23}}{m_2} \\ -\frac{k_{31}}{m_3} & -\frac{k_{32}}{m_3} & -\frac{k_{33}}{m_3} & -\frac{c_{31}}{m_3} & -\frac{c_{32}}{m_3} & -\frac{c_{33}}{m_3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \ddot{u}_g \quad (1.9b)$$

1.3.1. Ejemplo: Pórtico de 3 pisos

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 1.9; donde la matriz de masas, rigidez y amortiguamiento corresponden a las expresiones 1.10a, 1.10b y 1.10c, respectivamente. Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m × 0.50 m en columnas y 0.30 m × 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad considerado es $E = 21316773.9449 \text{ kN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.

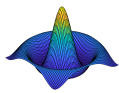
$$\mathbf{M}_{sin\ muro} = \begin{bmatrix} 59.55 & 0 & 0 \\ 0 & 52.35 & 0 \\ 0 & 0 & 50.48 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{C}_{sin\ muro} = \begin{bmatrix} 446.7005 & -292.7913 & 66.4871 \\ -292.7913 & 493.5840 & -205.0363 \\ 66.4871 & -205.0363 & 197.2917 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (1.10b)$$

$$\mathbf{K}_{sin\ muro} = \begin{bmatrix} 220669.3015 & -166937.0999 & 37908.1095 \\ -166937.0999 & 251513.5319 & -116902.9751 \\ 37908.1095 & -116902.9751 & 83648.6131 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (1.10c)$$

Solución: El código fuente (script) en forma parcial mostrado a continuación corresponde a la solución del ejemplo:

```
1 % Análisis tiempo historia de un pórtico bidimensional de un piso sin
2 % muros. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing Raul Franco Guzmán
3 % López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural de
4 % la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
```



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

```
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 M=diag([59.55 52.35 50.48]);
9 C=[446.700502949498 -292.791287499014 66.4871031841809; ...
10 -292.791287499014 493.583963429669 -205.036343618607; ...
11 66.4871031841809 -205.036343618607 197.291660727471];
12 K=[220669.301460576 -166937.099907566 37908.1094988513; ...
13 -166937.099907566 251513.531879198 -116902.975056786; ...
14 37908.1094988513 -116902.975056786 83648.6131098711];
15 calc1=size(M);
16 ndgl=calc1(1);
17 % Cálculo de la matriz A
18 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
19 % Cálculo de la matriz B
20 B=[zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
21 % Cálculo de la matriz C
22 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
23 % Cálculo de la matriz D
24 D=[zeros(ndgl,1); zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
25 % Componente de la aceleración del suelo registrada
26 load('Ica.txt')
27 t=Ica(:,1);
28 u=Ica(:,3)/100;
29 % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales
30 x0=[0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00];
31 sys=ss(A,B,C,D);
32 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
33 % Visualización numérica de los resultados.
34 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ↵
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 865 300]);
35 cnames = {'t','x1','x2','x3','v1','v2','v2','a1','a2','a3'};
36 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '↵
    Position',[50 25 770 255]); % (Continúa ...)
```

Resultados:

Una simulación visual de los desplazamientos ocasionados por el sismo (figura 1.10) y la gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 1.11)

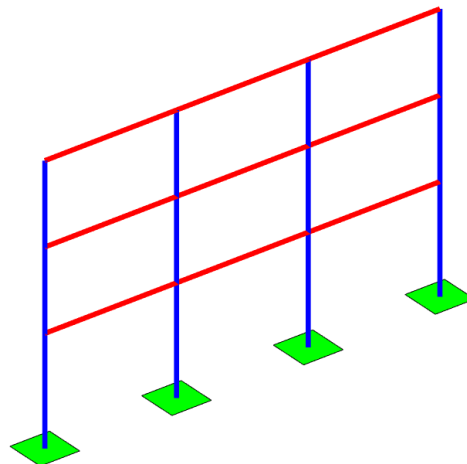
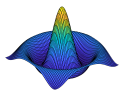


Figura 1.10: Modelo del pórtico de 3 pisos.



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

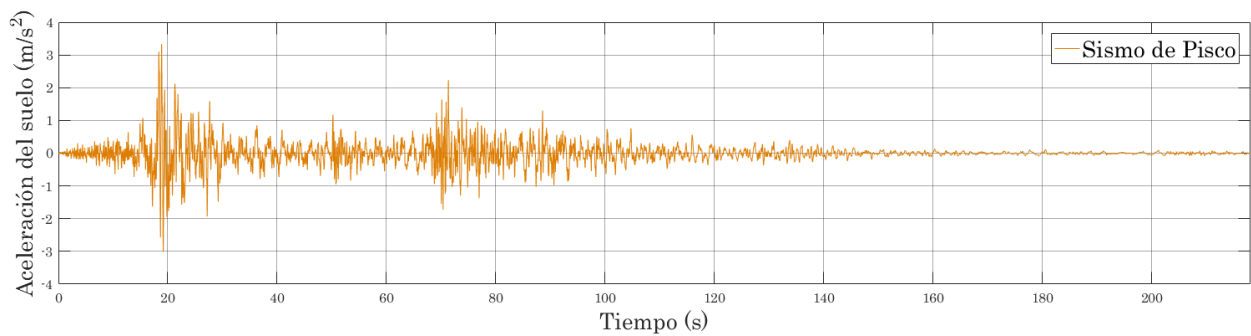


Figura 1.11: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 1.12) y gráficos (figuras 1.13, 1.14 y 1.15 respectivamente).

t	x1	x2	x3	v1	v2	v2	a1	a2	a3
0	4.3819e-24	-2.7225e-24	2.2821e-24	2.2515e-21	-4.6526e-22	5.5077e-22	0.0071	0.0071	0.0071
0.0100	1.7837e-07	1.8527e-07	1.8316e-07	1.8138e-05	2.0241e-05	1.9623e-05	-0.0034	-0.0030	-0.0031
0.0200	1.2829e-07	1.7246e-07	1.6165e-07	-3.3821e-05	-2.9346e-05	-3.0016e-05	-0.0068	-0.0070	-0.0068
0.0300	-4.5878e-07	-3.9919e-07	-4.0050e-07	-7.4295e-05	-7.8022e-05	-7.4754e-05	-0.0013	-0.0028	-0.0022
0.0400	-1.1867e-06	-1.2549e-06	-1.1960e-06	-6.3818e-05	-8.6592e-05	-7.8284e-05	0.0032	0.0012	0.0014
0.0500	-1.7108e-06	-2.0994e-06	-1.9595e-06	-4.5899e-05	-8.5780e-05	-7.9733e-05	2.8604e-04	-9.3187e-04	-0.0017
0.0600	-2.2624e-06	-3.0934e-06	-2.9516e-06	-7.4908e-05	-1.2209e-04	-1.2937e-04	-0.0060	-0.0064	-0.0081
0.0700	-3.3874e-06	-4.7168e-06	-4.7392e-06	-1.5721e-04	-2.1118e-04	-2.3668e-04	-0.0103	-0.0115	-0.0133
0.0800	-5.4866e-06	-7.4592e-06	-7.8104e-06	-2.6360e-04	-3.4274e-04	-3.8166e-04	-0.0108	-0.0148	-0.0157
0.0900	-8.5697e-06	-1.1582e-05	-1.2358e-05	-3.4353e-04	-4.7700e-04	-5.2255e-04	-0.0052	-0.0119	-0.0125
0.1000	-1.2036e-05	-1.6739e-05	-1.8016e-05	-3.2787e-04	-5.3296e-04	-5.8972e-04	0.0079	9.9102e-04	-0.0010
0.1100	-1.4698e-05	-2.1749e-05	-2.3740e-05	-1.8395e-04	-4.4140e-04	-5.3279e-04	0.0203	0.0175	0.0124
0.1200	-1.5518e-05	-2.5164e-05	-2.8379e-05	1.9446e-05	-2.2977e-04	-3.8765e-04	0.0200	0.0247	0.0168

Figura 1.12: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

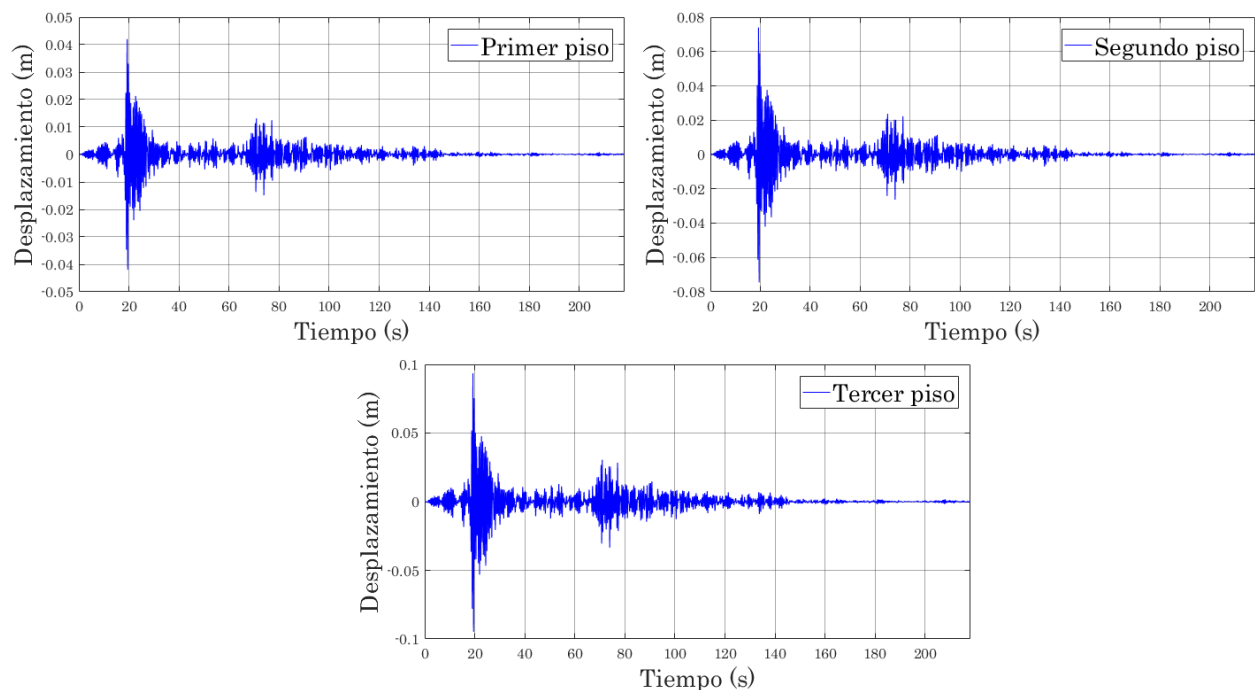
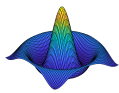


Figura 1.13: Historiales de desplazamientos.



1.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos sin muros

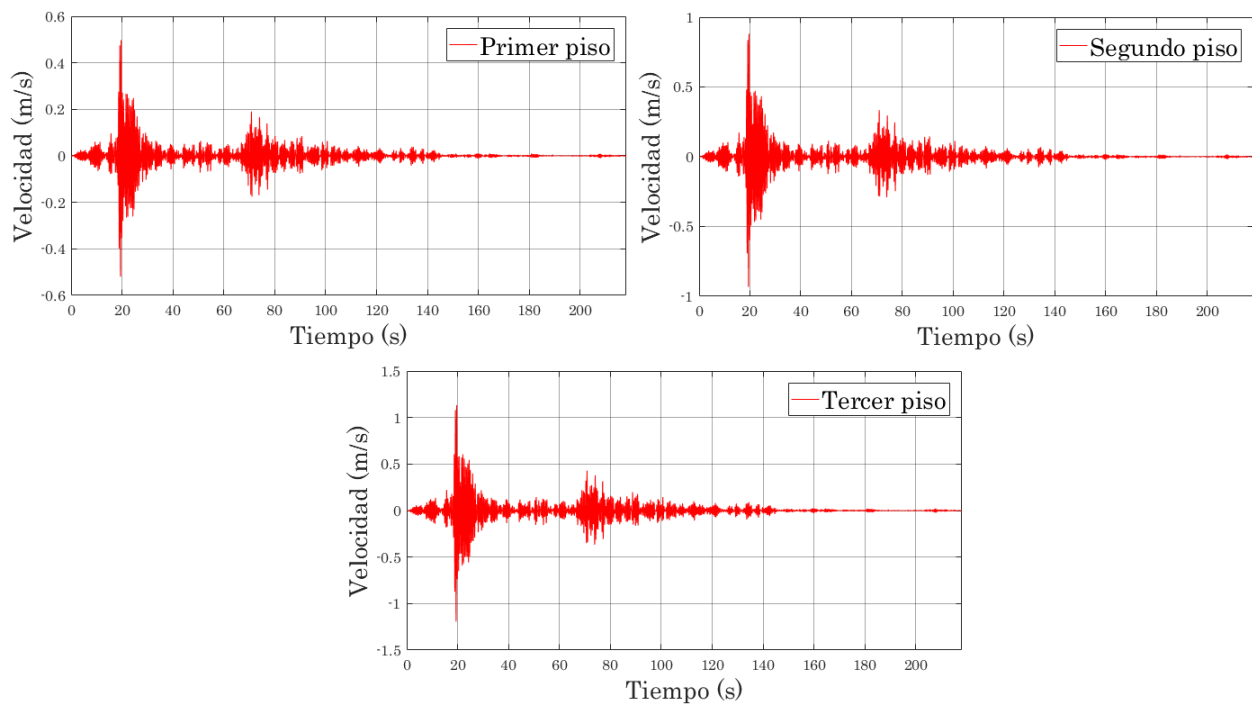


Figura 1.14: Historiales de velocidades.

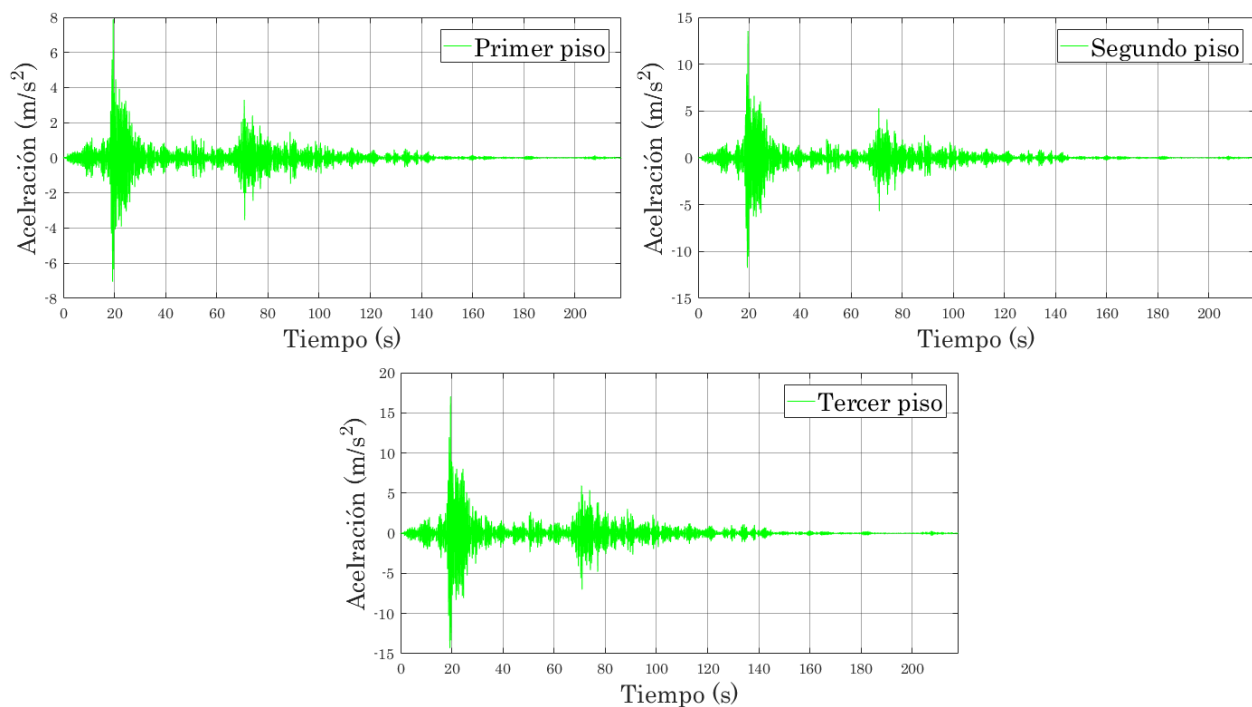
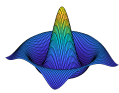


Figura 1.15: Historiales de aceleraciones.

La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 1.16).



1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

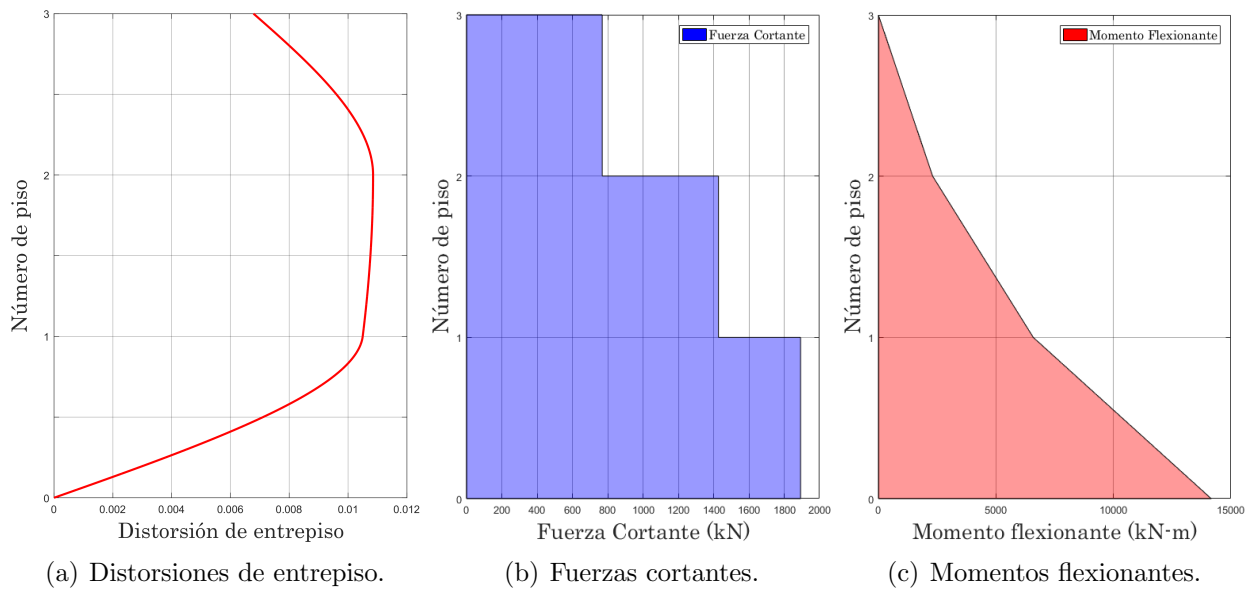


Figura 1.16: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

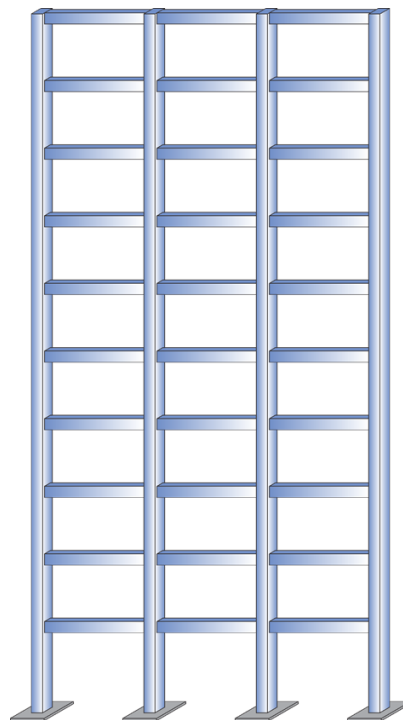
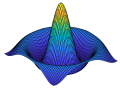


Figura 1.17: Pórtico de 10 pisos.

La ecuación 1.5 es la base del planteamiento del sistema, la cual se presenta de nuevo para comodidad del lector;

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{1}\ddot{u}_g$$

y debido a que el pórtico de la figura 1.17 cuenta con diez grados de libertad horizontales (modelo simplificado de viga en voladizo), al aplicar el procedimiento de reducción de orden



de ecuaciones diferenciales se obtendrán los arreglos matriciales mostrados en las ecuaciones 1.11a y 1.11b; a partir de las relaciones determinadas entre las derivadas de las variables asignadas (de $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_{20}$) y entre los desplazamientos, velocidades y aceleraciones de los diez grados de libertad del sistema.

$$[\dot{\mathbf{x}}_{20 \times 1}] = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{I}_{10 \times 10} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{10 \times 10} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_{10 \times 10} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} [\mathbf{x}_{20 \times 1}] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{10 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{10 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{u}_g \quad (1.11a)$$

$$[\mathbf{y}_{30 \times 1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{10 \times 1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{10 \times 1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{10 \times 1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{10 \times 10} & \mathbf{0}_{10 \times 10} \\ \mathbf{0}_{10 \times 10} & \mathbf{I}_{10 \times 10} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_{10 \times 10} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_{10 \times 10} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} [\mathbf{x}_{30 \times 1}] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{10 \times 1} \\ \mathbf{0}_{10 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{10 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \ddot{u}_g \quad (1.11b)$$

Una manera compacta de representar los arreglos matriciales anteriores se da en las ecuaciones de estado 1.12a y 1.12b.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\ddot{u}_g \quad (1.12a)$$

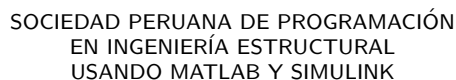
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}\ddot{u}_g \quad (1.12b)$$

1.4.1. Ejemplo: Pórtico de 10 pisos

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 1.17; donde la matriz de masas, rigidez y amortiguamiento corresponden a las expresiones 1.13, 1.14 y 1.15, respectivamente. Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m × 0.50 m en columnas y 0.30 m × 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E = 21316773.9449 \text{ kN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.

$$\mathbf{M}_{\text{sin muro}} = \begin{bmatrix} 59.55 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50.48 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{C}_{\text{sin muro}} = \begin{bmatrix} 1305.3000 & -1000.1000 & 292.7050 & \dots & -0.0829 & 0.0166 & -0.0025 \\ -1000.1000 & 1647.1000 & -1081.0000 & \dots & 0.4312 & -0.0848 & 0.0128 \\ 292.7050 & -1081.0000 & 1666.2000 & \dots & -2.1771 & 0.4211 & -0.0629 \\ -55.2512 & 307.7858 & -1084.6000 & \dots & 11.1606 & -2.1240 & 0.3142 \\ 10.5951 & -58.1046 & 308.4857 & \dots & -58.1921 & 10.9036 & -1.5969 \\ -2.0667 & 11.1437 & -58.2419 & \dots & 308.2456 & -56.9320 & 8.2596 \\ 0.4104 & -2.1739 & 11.1706 & \dots & -1083.4000 & 301.9558 & -43.4297 \\ -0.0829 & 0.4312 & -2.1771 & \dots & 1660.4000 & -1051.5000 & 231.8025 \\ 0.0166 & -0.0848 & 0.4211 & \dots & -1051.5000 & 1495.1000 & -681.0593 \\ -0.0025 & 0.0128 & -0.0629 & \dots & 231.8025 & -681.0593 & 501.8736 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (1.14)$$



1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

$\mathbf{K}_{sin\,muro} =$	221690.00	-172360.00	50445.00	...	-14.28	2.85	-0.43	$\frac{kN}{m}$	(1.15)
	-172360.00	280990.00	-186300.00	...	74.32	-14.61	2.21		
	50445.00	-186300.00	284280.00	...	-375.20	72.58	-10.85		
	-9522.10	53044.00	-186920.00	...	1923.40	-366.06	54.15		
	1826.00	-10014.00	53165.00	...	-10029.00	1879.20	-275.21		
	-356.18	1920.50	-10038.00	...	53124.00	-9811.80	1423.50		
	70.72	-374.65	1925.20	...	-186720.00	52040.00	-7484.80		
	-14.28	74.31	-375.20	...	283280.00	-181210.00	39949.00		
	2.85	-14.61	72.58	...	-181210.00	254790.00	-117370.00		
	-0.43	2.21	-10.85	...	39949.00	-117370.00	83717.00		

Solución: El código fuente (script) en forma parcial mostrado a continuación corresponde a la solución del ejemplo:

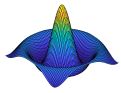
```

1 % Análisis tiempo historia de un pórtico bidimensional de 10 pisos sin
2 % muros. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing Raul Franco Guzmán
3 % López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural de
4 % la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 load M.mat
9 load C.mat
10 load K.mat
11 calc1=size(M);
12 ndgl=calc1(1);
13 % Cálculo de la matriz A
14 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
15 % Cálculo de la matriz B
16 B=[zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
17 % Cálculo de la matriz C
18 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
19 % Cálculo de la matriz D
20 D=[zeros(ndgl,1); zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
21 % Componente de la aceleración del suelo registrada
22 load('Ica.txt')
23 t=Ica(:,1);
24 u=Ica(:,3)/100;
25 % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales
26 x0=[0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 ←
    0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00];
27 sys=ss(A,B,C,D);
28 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
29 % Visualización numérica de los resultados.
30 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ←
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 985 300]);
31 cnames = {'t','x1','x2','x3','x4','x5','x6','x7','x8','x9','x10', ...
32     'v1','v2','v3','v4','v5','v6','v7','v8','v9','v10', ...
33     'a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9','a10'};
34 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName', [], '←
    Position',[70 25 845 255]); % (Continúa ...)

```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 1.18) y un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 1.19).



1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

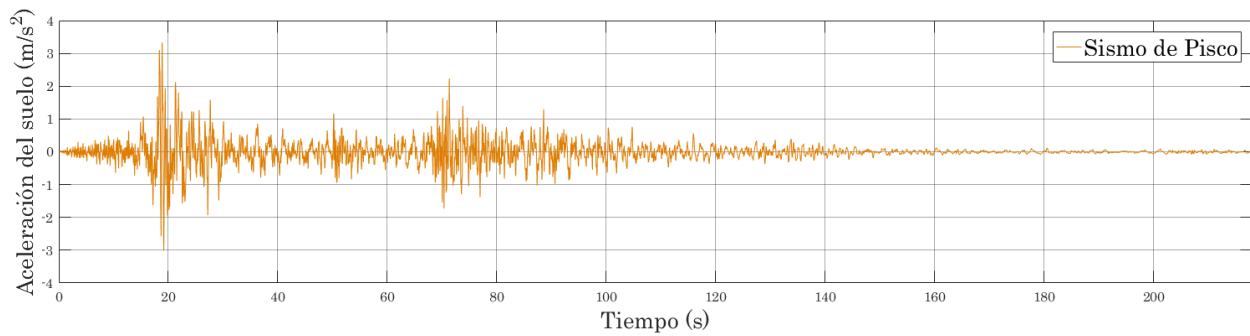


Figura 1.18: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

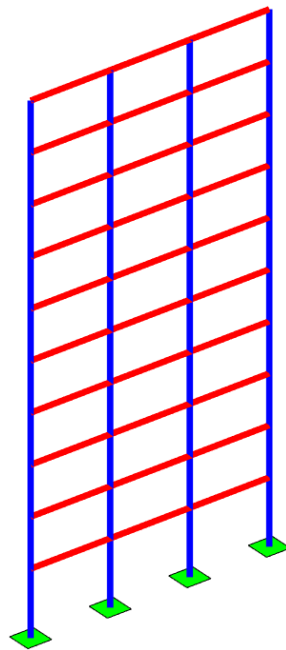


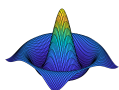
Figura 1.19: Modelo del pórtico de 10 pisos.

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 1.20).

t	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
0	-4.6910e-24	1.8480e-24	2.5891e-24	-6.1857e-24	-6.5046e-24	1.8704e-25	8.1155e-26	2.6223e-24	3.2152e-24	-5.9647e-25
0.0100	1.7484e-07	1.8698e-07	1.8361e-07	1.8392e-07	1.8391e-07	1.8391e-07	1.8391e-07	1.8391e-07	1.8391e-07	1.8391e-07
0.0200	1.1983e-07	1.7368e-07	1.6556e-07	1.6368e-07	1.6424e-07	1.6419e-07	1.6419e-07	1.6419e-07	1.6419e-07	1.6419e-07
0.0300	-4.5074e-07	-4.1095e-07	-3.9435e-07	-4.0358e-07	-4.0317e-07	-4.0279e-07	-4.0288e-07	-4.0287e-07	-4.0287e-07	-4.0287e-07
0.0400	-1.1437e-06	-1.2746e-06	-1.2054e-06	-1.2109e-06	-1.2159e-06	-1.2146e-06	-1.2145e-06	-1.2146e-06	-1.2146e-06	-1.2146e-06
0.0500	-1.6444e-06	-2.0951e-06	-2.0093e-06	-1.9789e-06	-1.9914e-06	-1.9918e-06	-1.9908e-06	-1.9909e-06	-1.9909e-06	-1.9909e-06
0.0600	-2.1945e-06	-3.0451e-06	-3.0415e-06	-2.9518e-06	-2.9579e-06	-2.9657e-06	-2.9639e-06	-2.9636e-06	-2.9638e-06	-2.9637e-06
0.0700	-3.3127e-06	-4.6507e-06	-4.8290e-06	-4.6977e-06	-4.6689e-06	-4.6850e-06	-4.6860e-06	-4.6844e-06	-4.6846e-06	-4.6847e-06
0.0800	-5.3699e-06	-7.4243e-06	-7.8461e-06	-7.7259e-06	-7.6400e-06	-7.6522e-06	-7.6616e-06	-7.6593e-06	-7.6587e-06	-7.6590e-06
0.0900	-8.3799e-06	-1.1589e-05	-1.2316e-05	-1.2259e-05	-1.2118e-05	-1.2103e-05	-1.2122e-05	-1.2123e-05	-1.2121e-05	-1.2121e-05
0.1000	-1.1785e-05	-1.6728e-05	-1.7915e-05	-1.7948e-05	-1.7774e-05	-1.7712e-05	-1.7732e-05	-1.7741e-05	-1.7738e-05	-1.7737e-05
0.1100	-1.4458e-05	-2.1619e-05	-2.3601e-05	-2.3753e-05	-2.3566e-05	-2.3451e-05	-2.3454e-05	-2.3473e-05	-2.3473e-05	-2.3470e-05

Figura 1.20: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figuras 1.21, 1.22 y 1.23 respectivamente).



1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

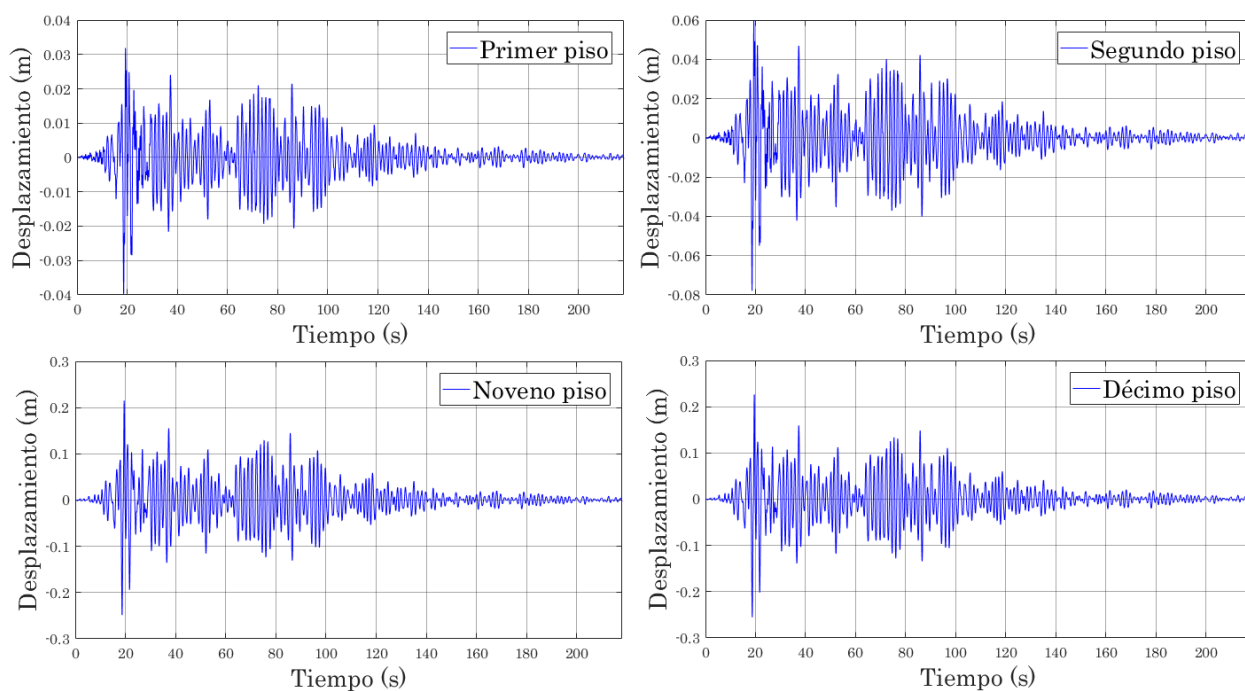


Figura 1.21: Historiales de desplazamientos.

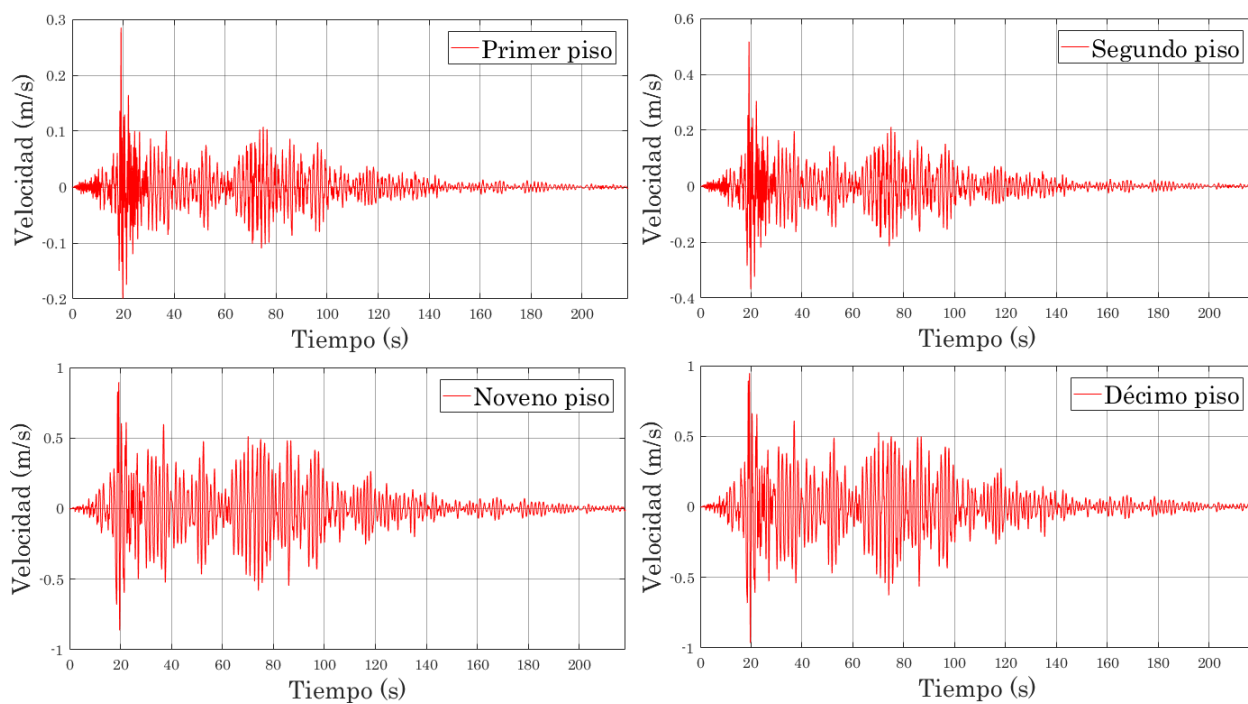
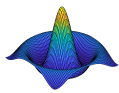


Figura 1.22: Historiales de velocidades.



1.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos

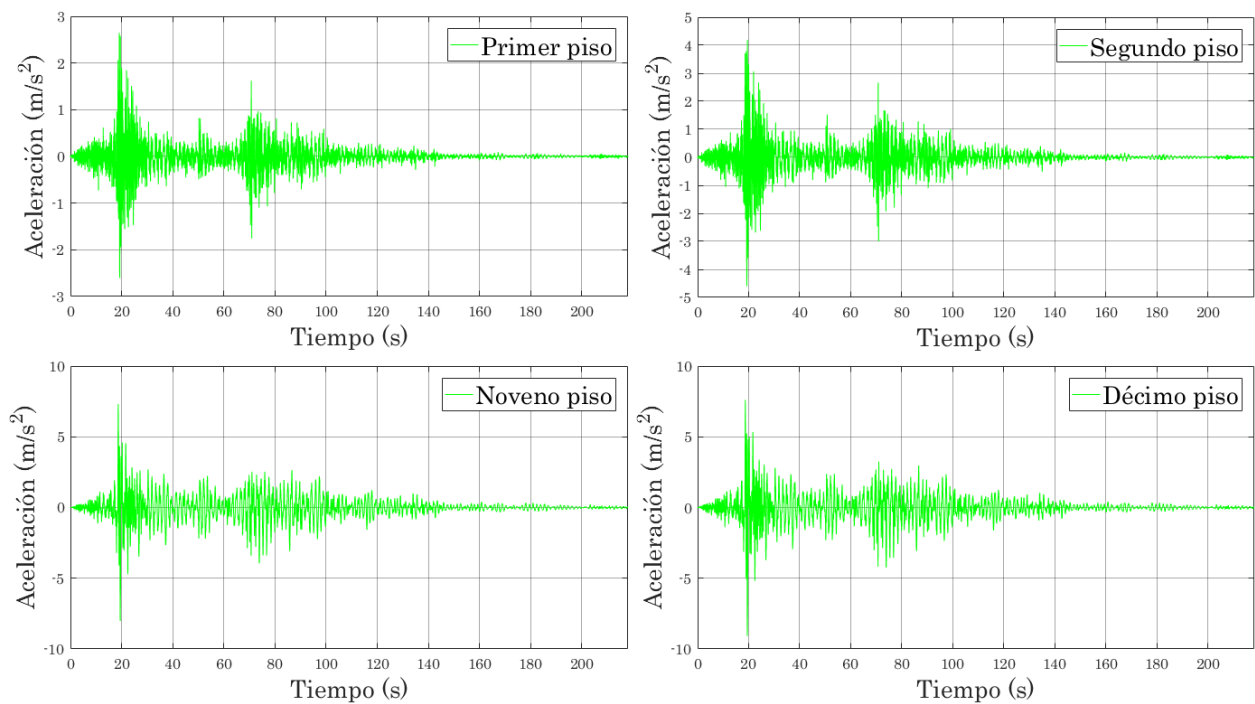


Figura 1.23: Historiales de aceleraciones.

La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 1.24).

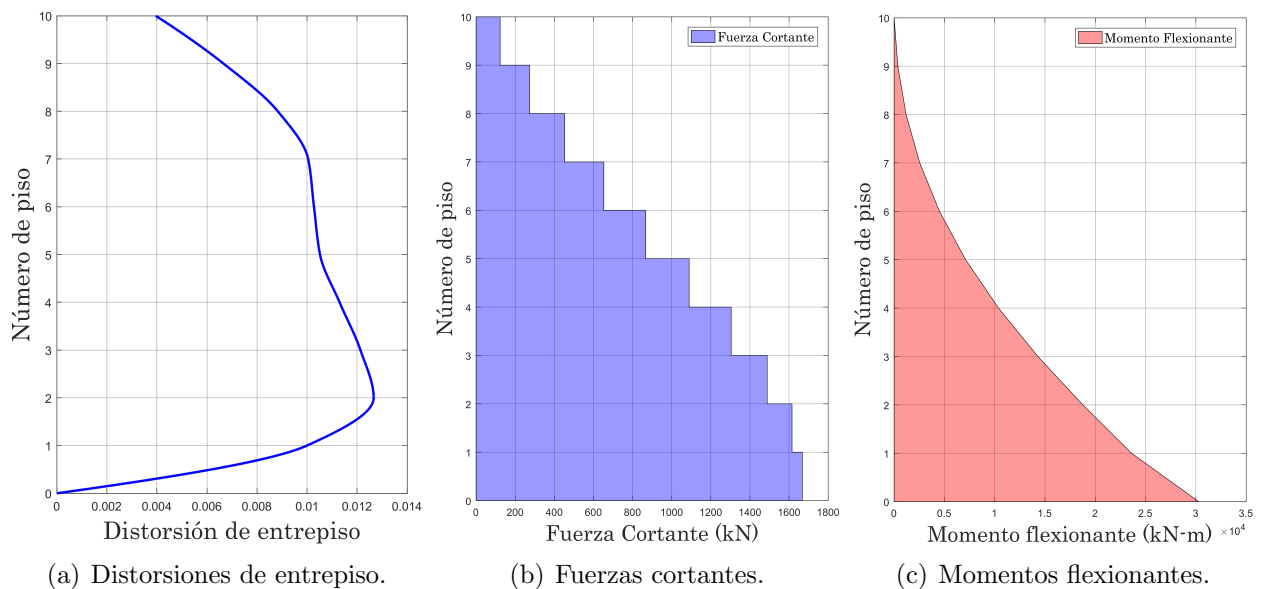
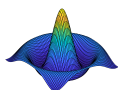


Figura 1.24: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



2. Matriz de rigidez de un muro y ensamblaje de la matriz de rigidez de un pórtico

2.1. Introducción

En este capítulo se muestra una descripción detallada de cómo se obtiene el factor de corte ϕ presente en ciertos términos de la matriz de rigidez de un muro y los pasos a seguir para realizar el ensamblaje de la matriz de rigidez de un pórtico bidimensional.

2.2. Matriz de rigidez de un elemento tipo muro

La contribución de los muros en la matriz de rigidez del sistema lineal bidimensional se consigue bajo la idealización de estos como columnas anchas. Modelándose las columnas anchas bajo las características de una viga en la cual se consideran las deformaciones por corte. Esta idealización es pertinente en muros continuos. Generalmente, los esfuerzos y deformaciones axiales se pueden desestimar en una viga, elementos viga axialmente rígidos, la cual sólo considerará esfuerzos de flexión y de corte (figura 2.1).

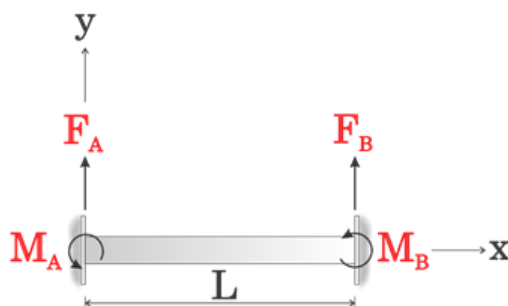
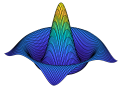


Figura 2.1: Fuerzas y momentos de una viga en el plano.

El factor de corte ϕ , añadido en los términos de la matriz de rigidez del muro, es obtenido de la integración de las relaciones establecidas deflexión-fuerza cortante y deflexión-momento flexionante en una viga, considerando las condiciones de contorno en estado deformado de la viga por un desplazamiento unitario en uno de sus extremos (figura 2.2).



2.2. Matriz de rigidez de un elemento tipo muro

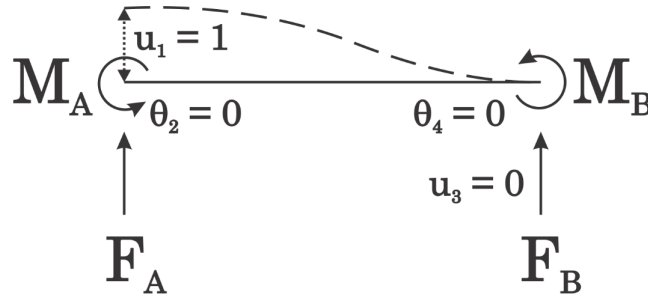


Figura 2.2: Condiciones de contorno debido a un desplazamiento unitario en A.

Las relaciones deflexión-fuerza cortante y deflexión-momento flexionante son establecidas en las ecuaciones 2.1a y 2.1b, respectivamente;

$$\frac{du_c}{dx} = \frac{-F}{GA_c} \quad (2.1a)$$

$$\frac{d^2u_f}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (2.1b)$$

siendo las definiciones de los términos designados en las relaciones anteriormente mencionadas, las siguientes:

u_c : deflexión debida a deformaciones por corte

F : fuerza cortante

E : módulo de elasticidad

ν : relación de Poisson

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: módulo de corte

A_c : área efectiva de la sección transversal en corte

u_f : deflexión debida a deformaciones por flexión

M : momento flector

I : momento de inercia de la sección transversal del muro

Para obtener la expresión del valor del factor de corte ϕ , se parte de la deflexión total de la viga; la cual resulta de considerar tanto sus deformaciones por flexión como por corte (ecuación 2.2).

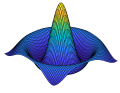
$$u = u_c + u_f \quad (2.2)$$

La deflexión de la viga en la figura 2.2 a una distancia x a partir del extremo izquierdo, estará dada por la ecuación 2.3;

$$EI \frac{d^2u_f}{dx^2} = F_A x - M_A \quad (2.3)$$

la cual puede ser establecida también como en la ecuación 2.4.

$$EI d^2u_f = (F_A x - M_A) dx^2 \quad (2.4)$$



2.2. Matriz de rigidez de un elemento tipo muro

Consecuentemente, se integran una sola vez ambos lados de la ecuación 2.4 para obtener la ecuación 2.5.

$$EI du_f = \left(F_A \frac{x^2}{2} - M_A x + C_1 \right) dx \quad (2.5)$$

Derivando la ecuación 2.2, y posteriormente, añadiendo los términos EI a cada uno de sus componentes y reemplazando las ecuaciones 2.1a y 2.1b, se obtendrá la secuencia de las ecuaciones 2.6a, 2.6b y 2.6c.

$$du = du_c + du_f \quad (2.6a)$$

$$EI du = EI du_c + EI du_f \quad (2.6b)$$

$$EI du = EI \left(\frac{-F_A}{GA_c} dx \right) + \left(F_A \frac{x^2}{2} - M_A x + C_1 \right) dx \quad (2.6c)$$

En este instante, se procede a realizar integración en ambos lados de la ecuación 2.6c para obtener la ecuación 2.7;

$$EI u = F_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} + \left(C_1 - \frac{EIF_A}{GA_c} \right) x + C_2 \quad (2.7)$$

en la cual se aplicarán las condiciones de contorno de la figura 2.2, dadas en las expresiones 2.8 y 2.9.

$$\frac{du}{dx} = \frac{du_c}{dx} = \frac{-F_A}{GA_c} \text{ en } x = 0, x = L \quad (2.8)$$

$$u = 0 \text{ en } x = L \quad (2.9)$$

Por último, después de todas las consideraciones supuestas se tiene la siguiente igualdad;

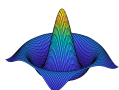
$$EI u = F_A \frac{x^3}{6} - M_A \frac{x^2}{2} - \frac{\phi F_A x L^2}{12} + (1 + \phi) \frac{F_A L^3}{12} \quad (2.10)$$

de donde se deducen las expresiones 2.11 y 2.12, siendo la expresión 2.12 el valor del factor de corte ϕ .

$$M_A = \frac{F_A L}{2} \quad (2.11)$$

$$\phi = \frac{12EI}{GA_c L^2} \quad (2.12)$$

Del equilibrio de fuerzas y momentos, y considerando las condiciones de contorno de la figura 2.3, se obtiene los componentes de la matriz de rigidez simétrica de un muro en un sistema lineal bidimensional; dicha matriz se muestra en la expresión 2.13, en la cual también se indica la correspondencia de cada componente con su respectivo grado de libertad.



2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

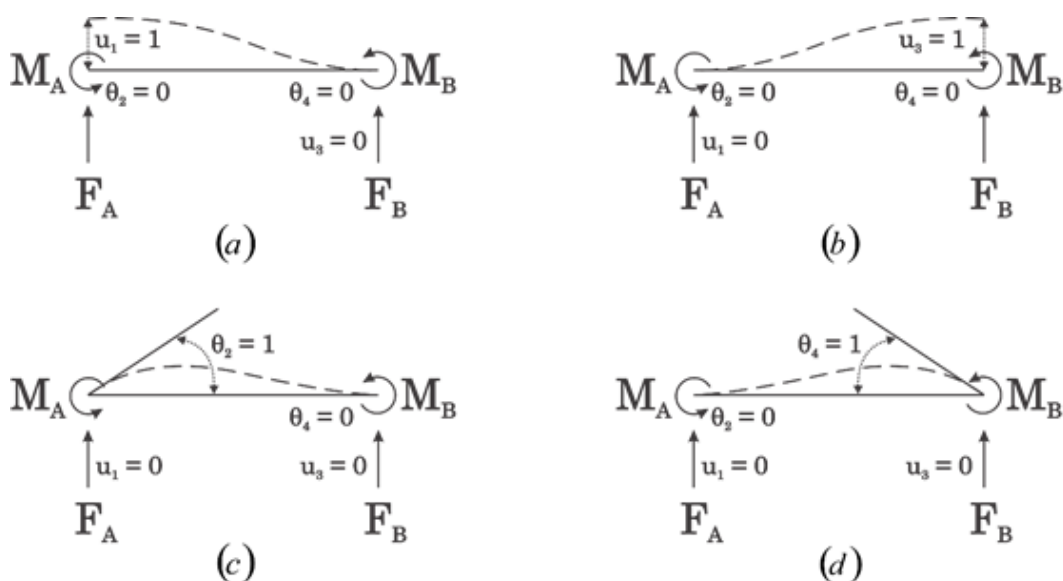


Figura 2.3: Condiciones de contorno obtenidas por desplazamientos unitarios (a y b) y por giros unitarios (c y d) en los extremos de la viga.

$$\mathbf{k}_{muro} = \frac{1}{(1 + \phi)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & (4 + \phi)\frac{EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & (2 - \phi)\frac{EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & (2 - \phi)\frac{EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & (4 + \phi)\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

Los pasos necesarios para obtener la matriz de rigidez de un pórtico plano, son los siguientes:

2.3.1. Primer paso

Identificar los grados de libertad del modelo estructural.

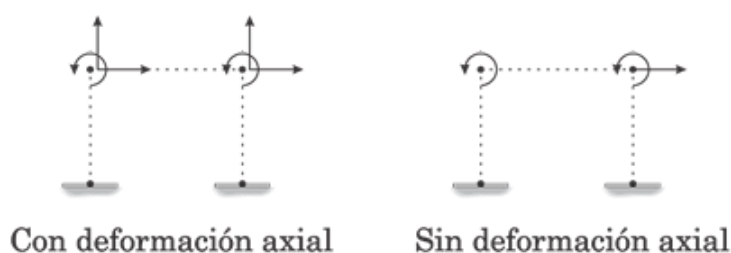
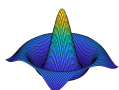


Figura 2.4: Posibles grados de libertad de un mismo pórtico bidimensional.



2.3.2. Segundo paso

Identificar las matrices de rigidez de los elementos viga y columna del modelo estructural, en coordenadas locales.

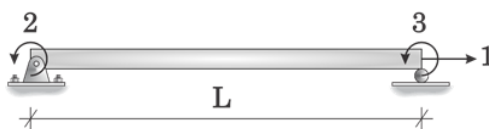


Figura 2.5: Viga de sección constante que no considera efectos de corte.

$$\mathbf{k}_{viga}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.14)$$

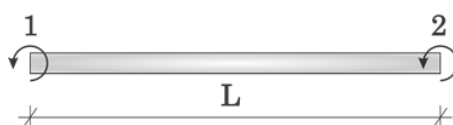


Figura 2.6: Viga de sección constante que no considera efectos de corte (axialmente rígida).

$$\mathbf{k}_{viga}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.15)$$

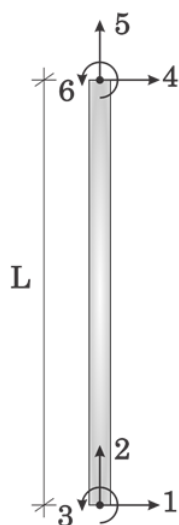
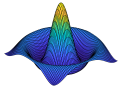


Figura 2.7: Columna, sin considerar efectos de corte.



2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

$$\mathbf{k}_{columna}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L^2} \\ -\frac{12EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.16)$$

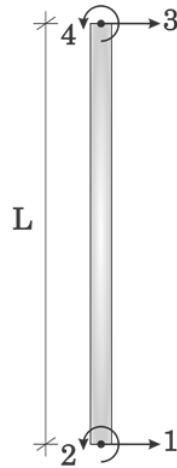
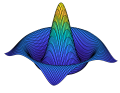


Figura 2.8: Columna, sin considerar efectos de corte (axialmente rígida).

$$\mathbf{k}_{columna}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L^2} \\ -\frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.17)$$

2.3.3. Tercer paso

Utilizar las matrices de transformación, con la finalidad de pasar de coordenadas locales a coordenadas globales las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas de los elementos del modelo estructural; como se ilustra en la figura 2.9.



2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

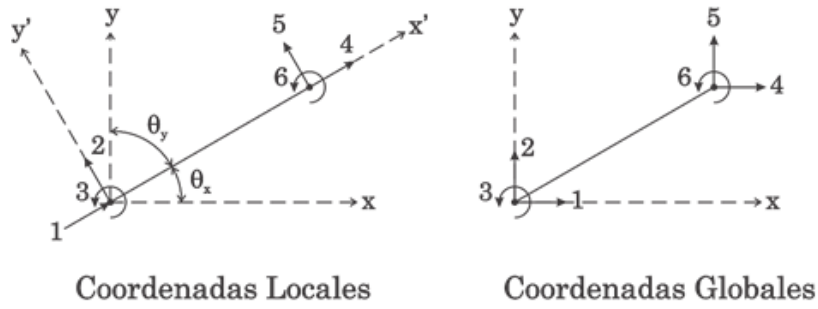


Figura 2.9: Sistema de coordenadas locales y globales.

La matriz de transformación y su transpuesta se presentan en las expresiones 2.18 y 2.19, respectivamente;

$$\mathbf{T} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_x & c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_y & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_y & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{T}^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_x & -c_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_y & c_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_x & -c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_y & c_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.19)$$

donde:

$$c_x = \cos(\theta_x) \quad (2.20a)$$

$$c_y = \cos(\theta_y) \quad (2.20b)$$

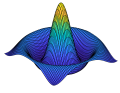
La matriz de rigidez de los elementos de la estructura en coordenadas globales está dada por la expresión 2.21;

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^* \mathbf{T} \quad (2.21)$$

donde:

$\mathbf{k}$: Matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales

$\mathbf{k}^*$: Matriz de rigidez del elemento en coordenadas locales



2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

T: Matriz de transformación

T^T: Transpuesta de la matriz de transformación

Procediendo de esta manera, se tiene que la matriz de rigidez de una viga en coordenadas globales es:

$$k_{viga} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.22)$$

y la matriz de rigidez de una columna en coordenadas globales es:

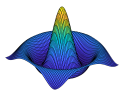
$$k_{columna} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L^2} \\ -\frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.23)$$

Con fines ilustrativos, al considerar los 6 grados de libertad por elemento, en términos generales, la matriz de rigidez de cada elemento de un sistema aporticado estará dada por la expresión 2.24.

$$k = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{L}c_x^2 + \frac{12EI}{L^3}c_y^2\right) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & -\frac{6EI}{L^2}c_y & -\left(\frac{EA}{L}c_x^2 + \frac{12EI}{L^3}c_y^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & -\frac{6EI}{L^2}c_y \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & \left(\frac{EA}{L}c_y^2 + \frac{12EI}{L^3}c_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c_x & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & -\left(\frac{EA}{L}c_y^2 + \frac{12EI}{L^3}c_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}c_x \\ -\frac{6EI}{L^2}c_y & \frac{6EI}{L^2}c_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}c_y & -\frac{6EI}{L^2}c_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{EA}{L}c_x^2 + \frac{12EI}{L^3}c_y^2\right) & -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & \frac{6EI}{L^2}c_y & \left(\frac{EA}{L}c_x^2 + \frac{12EI}{L^3}c_y^2\right) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & \frac{6EI}{L^2}c_y \\ -\left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & -\left(\frac{EA}{L}c_y^2 + \frac{12EI}{L^3}c_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c_x & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)c_x c_y & \left(\frac{EA}{L}c_y^2 + \frac{12EI}{L^3}c_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}c_x \\ -\frac{6EI}{L^2}c_y & \frac{6EI}{L^2}c_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}c_y & -\frac{6EI}{L^2}c_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.24)$$

2.3.4. Cuarto paso

Al ensamblar la matriz de rigidez del modelo estructural en coordenadas globales, se suma el aporte de los términos de rigidez de cada elemento en su respectivo grado de libertad; como se ilustra en la figura 2.10.



2.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez

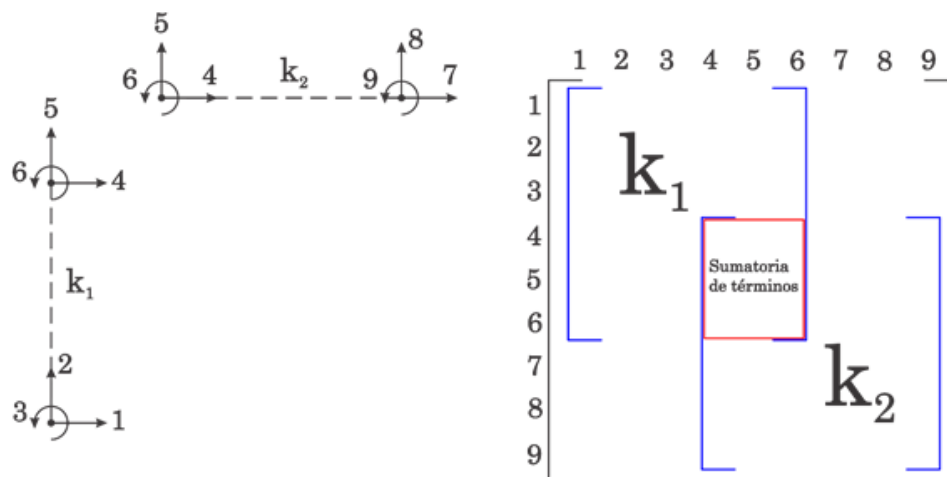
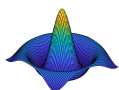


Figura 2.10: Procedimiento de ensamblaje de la matriz de rigidez.



3. Matriz de rigidez de pórticos bidimensionales con muros acoplados usando MATLAB®

3.1. Introducción

En este capítulo se presenta la formulación y construcción, en código fuente de MATLAB®, de las matrices de rigidez de pórticos bidimensionales que incluyen muros. Los ejemplos desarrollados corresponden a pórticos de 1, 3 y 10 pisos; bajo la idealización de elementos axialmente rígidos. Una vez comprendidos estos ejemplos, el lector estará en la capacidad de extender el procedimiento de desarrollo de cálculo en pórticos que involucren una cantidad n de pisos y crujeías. También se presentan las matrices resultantes de masas y amortiguamiento de los ejemplos, debido a que forman parte del análisis dinámico a llevarse a cabo en el siguiente capítulo.

3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 3.1, donde la masa concentrada del único piso es $66.27 \text{ kN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ y la fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.05$ (para obtener el amortiguamiento del sistema utilizar la expresión conocida $c = 2\zeta m\omega_n$).

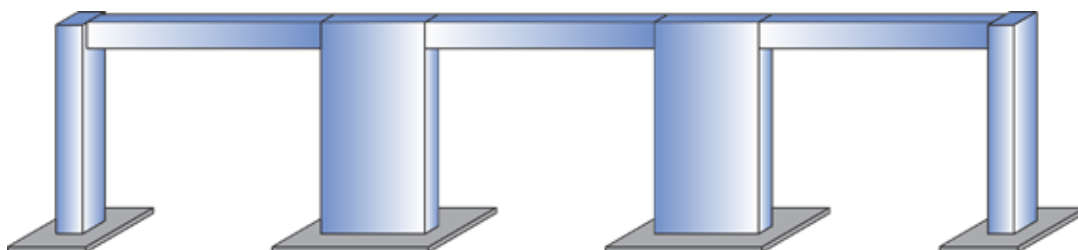
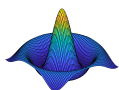


Figura 3.1: Pórtico de 1 piso con muros.

Las columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes y tienen una altura de 4.00 m; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m $\times$ 0.50 m en columnas, 0.30 m $\times$ 2.00 m en muros y 0.30 m $\times$ 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E=21316773.9449 \text{ kN/m}^2$.



3.2.1. Masa

La masa concentrada al nivel del techo del primer piso corresponde a $66.27 \text{ kN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$.

3.2.2. Matriz de rigidez lateral

La construcción de la matriz de rigidez se vincula a la idealización asumida de un comportamiento axialmente rígido de los elementos estructurales (columnas, muros y vigas); finalmente la matriz de rigidez lateral se obtendrá aplicando el procedimiento de condensación estática a la matriz de rigidez del sistema.

En primera instancia, se requiere desarrollar un bosquejo de la discretización del sistema (figura 3.2),

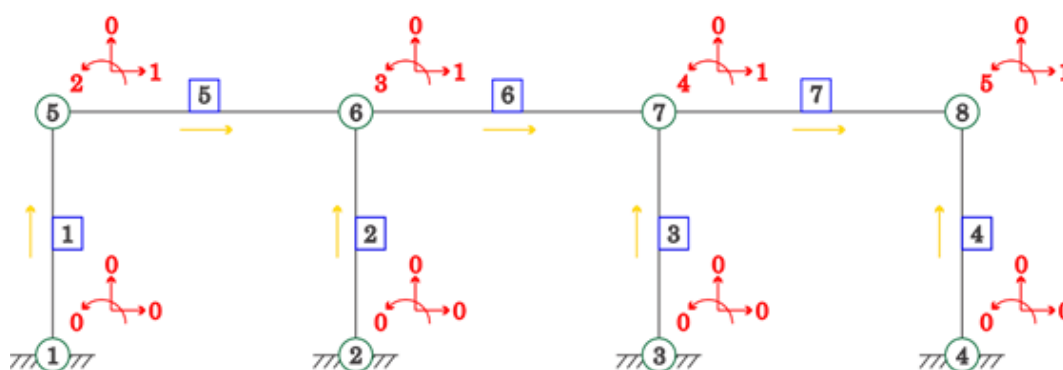


Figura 3.2: Discretización del pórtico de 1 piso con muros.

de tal modo que se establezca un orden idóneo (de elementos, nodos y grados de libertad) para el ingreso de datos.

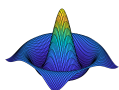
El orden establecido es plasmado en matrices de ingreso de datos, a partir de las cuales se elaborará la matriz de rigidez lateral del sistema. La matriz de ingreso **data1** (tabla 3.1) constituye la relación de los nodos con sus respectivos grados de libertad.

# de nodo	# de grado de libertad en X	# de grado de libertad en Y	# de grado de libertad en Z
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	1	0	2
6	1	0	3
7	1	0	4
8	1	0	5

Tabla 3.1: Matriz de ingreso **data1** (Pórtico de 1 piso con muros).

La matriz de ingreso **data2** (tabla 3.2) dispone entre que nodos se encuentran comprendidos los elementos o miembros.

# de miembro	# de nodo cercano	# de nodo lejano
1	1	5
2	2	6
3	3	7
4	4	8
Continúa en la siguiente página ...		



3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

# de miembro	# de nodo cercano	# de nodo lejano
5	5	6
6	6	7
7	7	8

Tabla 3.2: Matriz de ingreso **data2** (Pórtico de 1 piso con muros).

La matriz de ingreso **data3** (tabla 3.3) establece la relación de los miembros con sus respectivos grados de libertad.

# de miembro	# de gdlcX	# de gdlcY	# de gdlcZ	# de gdllX	# de gdllY	# de gdllZ
1	0	0	0	1	0	2
2	0	0	0	1	0	3
3	0	0	0	1	0	4
4	0	0	0	1	0	5
5	1	0	2	1	0	3
6	1	0	3	1	0	4
7	1	0	4	1	0	5

Tabla 3.3: Matriz de ingreso **data3** (Pórtico de 1 piso con muros).

donde:

gdlcX: Grado de libertad cercano en X.

gdlcY: Grado de libertad cercano en Y.

gdlcZ: Grado de libertad cercano en Z.

gdllX: Grado de libertad lejano en X.

gdllY: Grado de libertad lejano en Y.

gdllZ: Grado de libertad lejano en Z.

La matriz de ingreso **data4** (tabla 3.4) especifica la ubicación de los nodos en las coordenadas X y Y.

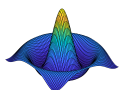
# de nodo	Coordenada en X	Coordenada en Y
1	0	0
2	5	0
3	10	0
4	15	0
5	0	4
6	5	4
7	10	4
8	15	4

Tabla 3.4: Matriz de ingreso **data4** (Pórtico de 1 piso con muros).

La matriz de ingreso **data5** (tabla 3.5) asigna propiedades y características de cada uno de los miembros.

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
1	21316775.9449	0.0052	0
2	21316775.9449	0.2000	0.6
3	21316775.9449	0.2000	0.6
4	21316775.9449	0.0052	0
5	21316775.9449	0.0031	0
6	21316775.9449	0.0031	0

Continúa en la siguiente página ...



3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
7	21316775.9449	0.0031	0

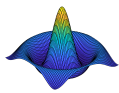
Tabla 3.5: Matriz de ingreso **data5** (Pórtico de 1 piso con muros).

El código fuente para la construcción de la matriz de rigidez del pórtico de 1 piso con muros y la obtención de su respectiva matriz de rigidez lateral se muestra a continuación:

```

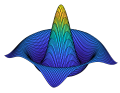
1  % Rigidez lateral (Pórticos 2D con muros - elementos axialmente rígidos)
2  % Por: Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco Guzmán López.
3  % Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural de la
4  % Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5  % Funciones de limpieza
6  clc; clear all; close all;
7  % Ingreso de datos
8  data1=[1 0 0 0; 2 0 0 0; 3 0 0 0; 4 0 0 0; 5 1 0 2; 6 1 0 3; 7 1 0 4; 8 ↵
      1 0 5];
9  ndgl=max(max(data1(:,2:4)));
10 [nn,ncdata1]=size(data1);
11 data2=[1 1 5; 2 2 6; 3 3 7; 4 4 8; 5 5 6; 6 6 7; 7 7 8];
12 [nm, ncdata2]=size(data2);
13 for i=1:nm
14     data3(i,1)=i;
15     data3(i,2)=data1(data2(i,2),2);
16     data3(i,3)=data1(data2(i,2),3);
17     data3(i,4)=data1(data2(i,2),4);
18     data3(i,5)=data1(data2(i,3),2);
19     data3(i,6)=data1(data2(i,3),3);
20     data3(i,7)=data1(data2(i,3),4);
21 end
22 data4=[1 0 0; 2 5 0; 3 10 0; 4 15 0; 5 0 4; 6 5 4; 7 10 4; 8 15 4];
23 data5=[1 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0; 2 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 ↵
      0.6; 3 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 4 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 ↵
      0; 5 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 6 21316775.9449 (1/12) ↵
      *0.3*0.5^3 0; 7 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0];
24 ngdlc=1; % Número de grados de libertad condensados
25 evc=[1 4 5 6 7]; % Elementos viga o columna
26 em=[2 3]; % Elementos muro
27 poisson=0.2; % Relación de Poisson
28 % Cálculo de cosenos directores y longitudes de cada elemento
29 for i=1:nm
30     xN=data4(data2(i,2),2);
31     yN=data4(data2(i,2),3);
32     xF=data4(data2(i,3),2);
33     yF=data4(data2(i,3),3);
34     met(i,1)=((xF-xN)^2+(yF-yN)^2)^0.5;
35     met(i,2)=(xF-xN)/(met(i,1));
36     met(i,3)=(yF-yN)/(met(i,1));
37 end
38 % Matriz de rigidez (Global) de los elementos viga y columna
39 for i=evc
40     E=data5(i,2); I=data5(i,3); A=data5(i,4); L=met(i,1); lambdax=met(i,2) ↵
      ; lambday=met(i,3);
41     matrix(1,1,i)=A*E/L*lambdax^2+12*E*I/L^3*lambday^2;
42     matrix(2,1,i)=(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;
43     matrix(3,1,i)=-6*E*I/L^2*lambday;
44     matrix(4,1,i)=-(A*E/L*lambdax^2+12*E*I/L^3*lambday^2);

```



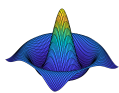
3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

```
45 matrix(5,1,i)=-(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
46 matrix(6,1,i)=-(6*E*I/L^2)*lambday;  
47 matrix(1,2,i)=(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
48 matrix(2,2,i)=A*E/L*lambday^2+12*E*I/L^3*lambdax^2;  
49 matrix(3,2,i)=6*E*I/L^2*lambdax;  
50 matrix(4,2,i)=-(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
51 matrix(5,2,i)=-(A*E/L*lambday^2+12*E*I/L^3*lambdax^2);  
52 matrix(6,2,i)=6*E*I/L^2*lambdax;  
53 matrix(1,3,i)=-6*E*I/L^2*lambday;  
54 matrix(2,3,i)=6*E*I/L^2*lambdax;  
55 matrix(3,3,i)=4*E*I/L;  
56 matrix(4,3,i)=6*E*I/L^2*lambday;  
57 matrix(5,3,i)=-6*E*I/L^2*lambdax;  
58 matrix(6,3,i)=2*E*I/L;  
59 matrix(1,4,i)=-(A*E/L*lambdax^2+12*E*I/L^3*lambday^2);  
60 matrix(2,4,i)=-(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
61 matrix(3,4,i)=6*E*I/L^2*lambday;  
62 matrix(4,4,i)=A*E/L*lambdax^2+12*E*I/L^3*lambday^2;  
63 matrix(5,4,i)=(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
64 matrix(6,4,i)=6*E*I/L^2*lambday;  
65 matrix(1,5,i)=-(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
66 matrix(2,5,i)=-(A*E/L*lambday^2+12*E*I/L^3*lambdax^2);  
67 matrix(3,5,i)=-6*E*I/L^2*lambdax;  
68 matrix(4,5,i)=(A*E/L-12*E*I/L^3)*lambdax*lambday;  
69 matrix(5,5,i)=A*E/L*lambday^2+12*E*I/L^3*lambdax^2;  
70 matrix(6,5,i)=-6*E*I/L^2*lambdax;  
71 matrix(1,6,i)=-(6*E*I/L^2*lambday);  
72 matrix(2,6,i)=6*E*I/L^2*lambdax;  
73 matrix(3,6,i)=2*E*I/L;  
74 matrix(4,6,i)=6*E*I/L^2*lambday;  
75 matrix(5,6,i)=-6*E*I/L^2*lambdax;  
76 matrix(6,6,i)=4*E*I/L;  
77 end  
78 % Matriz de rigidez (Global) de los elementos muro  
79 for i=em  
80 G(i,1)=data5(i,2)/(2*(1+poisson)); E=data5(i,2); I=data5(i,3); A=data5(i,4); L=met(i,1); lambdax=met(i,2); lambday=met(i,3); phi_cal=12*E*  
    *I/(G(i,1)*(A/1.2)*L^2);  
81 matrix(1,1,i)=0;  
82 matrix(2,1,i)=0;  
83 matrix(3,1,i)=0;  
84 matrix(4,1,i)=0;  
85 matrix(5,1,i)=0;  
86 matrix(6,1,i)=0;  
87 matrix(1,2,i)=0;  
88 matrix(2,2,i)=12*E*I/((1+phi_cal)*L^3);  
89 matrix(3,2,i)=6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);  
90 matrix(4,2,i)=0;  
91 matrix(5,2,i)=-12*E*I/((1+phi_cal)*L^3);  
92 matrix(6,2,i)=6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);  
93 matrix(1,3,i)=0;  
94 matrix(2,3,i)=6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);  
95 matrix(3,3,i)=((4+phi_cal)/(1+phi_cal))*E*I/L;  
96 matrix(4,3,i)=0;  
97 matrix(5,3,i)=-6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);  
98 matrix(6,3,i)=((2-phi_cal)/(1+phi_cal))*E*I/L;  
99 matrix(1,4,i)=0;
```



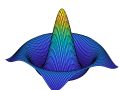
3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

```
100 matrix(2,4,i)=0;
101 matrix(3,4,i)=0;
102 matrix(4,4,i)=0;
103 matrix(5,4,i)=0;
104 matrix(6,4,i)=0;
105 matrix(1,5,i)=0;
106 matrix(2,5,i)=-12*E*I/((1+phi_cal)*L^3);
107 matrix(3,5,i)=-6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);
108 matrix(4,5,i)=0;
109 matrix(5,5,i)=12*E*I/((1+phi_cal)*L^3);
110 matrix(6,5,i)=-6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);
111 matrix(1,6,i)=0;
112 matrix(2,6,i)=6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);
113 matrix(3,6,i)=((2-phi_cal)/(1+phi_cal))*E*I/L;
114 matrix(4,6,i)=0;
115 matrix(5,6,i)=-6*E*I/((1+phi_cal)*L^2);
116 matrix(6,6,i)=((4+phi_cal)/(1+phi_cal))*E*I/L;
117 T(:, :, i)=[lambdax lambday 0 0 0 0; -lambday lambdax 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 ←
              0; 0 0 0 lambdax lambday 0; 0 0 0 -lambday lambdax 0; 0 0 0 0 0 ←
              1];
118 matrix(:, :, i)=T(:, :, i)'*matrix(:, :, i)*T(:, :, i);
119 end
120 for i=1:nm
121     for j=2:7
122         if data3(i,j)~=0
123             matrix1(:, data3(i,j), i)=matrix(:, j-1, i);
124         else
125             end
126         end
127     end
128 for i=1:nm
129     for j=2:7
130         if data3(i,j)~=0
131             matrix2(data3(i,j), :, i)=matrix1(j-1, :, i);
132         else
133             end
134         end
135     end
136 % Ensamblaje de la matriz de rigidez
137 K=zeros(ndgl, ndgl);
138 for i=1:nm
139     K=K+matrix2(:, :, i);
140 end
141 % Procedimiento de condensación estática
142 KT=K(1:ngdlc, 1:ngdlc)-K(1:ngdlc, ngdlc+1:end)/(K(ngdlc+1:end, ngdlc+1:end) ←
    ) * K(ngdlc+1:end, 1:ngdlc);
143 % Visualización gráfica de la discretización
144 figure('Name', 'Discretización de la estructura', 'NumberTitle', 'off', ' ←
    units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1])
145 set(gcf, 'Color', 'w')
146 set(gca, 'Color', 'w', 'Visible', 'off')
147 axis equal tight
148 hold on
149 for i=1:nm
150     plot([data4(data2(i,2), 2) data4(data2(i,3), 2)], [data4(data2(i,2), 3) ←
    data4(data2(i,3), 3)], 'LineWidth', 2.0, 'Color', 'y');
151 end
```



3.2. Pórtico bidimensional de 1 piso con muros

```
152 x=max(data4(:,2));
153 altprom=x/10;
154 for i=1:nn
155     plot([data4(i,2),data4(i,2)],[data4(i,3),data4(i,3)+0.5*altprom], '↵
        Color',[0.9 0.5 0.1]);
156     plot([data4(i,2),data4(i,2)-0.075*altprom],[data4(i,3)+0.5*altprom,↵
        data4(i,3)+0.375*altprom], 'Color',[0.9 0.5 0.1]);
157     plot([data4(i,2),data4(i,2)+0.075*altprom],[data4(i,3)+0.5*altprom,↵
        data4(i,3)+0.375*altprom], 'Color',[0.9 0.5 0.1]);
158     text('Position',[data4(i,2)+0.1*altprom,data4(i,3)+0.55*altprom], '↵
        String',data1(i,3), 'FontSize',12, 'Color',[0.1 0.4 0.9]);
159 end
160 for i=1:nn
161     plot([data4(i,2),data4(i,2)+0.5*altprom],[data4(i,3),data4(i,3)], '↵
        Color',[0.9 0.5 0.1]);
162     plot([data4(i,2)+0.5*altprom,data4(i,2)+0.375*altprom],[data4(i,3),↵
        data4(i,3)-0.075*altprom], 'Color',[0.9 0.5 0.1]);
163     plot([data4(i,2)+0.5*altprom,data4(i,2)+0.375*altprom],[data4(i,3),↵
        data4(i,3)+0.075*altprom], 'Color',[0.9 0.5 0.1]);
164     text('Position',[data4(i,2)+0.50*altprom,data4(i,3)+0.20*altprom], '↵
        String',data1(i,2), 'FontSize',12, 'Color',[0.1 0.4 0.9]);
165 end
166 th=linspace(0,pi,100);
167 r=altprom/4;
168 for i=1:nn
169     xh=r*cos(th)+data4(i,2);
170     yh=r*sin(th)+data4(i,3);
171     plot(xh,yh, 'Color',[0.9 0.5 0.1]); axis equal;
172     text('Position',[-2*r+data4(i,2),data4(i,3)+1.0*r], 'String',data1(i,4)↵
        , 'FontSize',12, 'Color',[0.1 0.4 0.9])
173     plot([data4(i,2)-r data4(i,2)-0.5*r],[data4(i,3) data4(i,3)+0.5*r], '↵
        Color',[0.9 0.5 0.1])
174     plot([data4(i,2)-r data4(i,2)-1.5*r],[data4(i,3) data4(i,3)+0.5*r], '↵
        Color',[0.9 0.5 0.1])
175 end
176 for i=1:nn
177     plot(data4(i,2),data4(i,3), 'Marker','0', 'Color',[0.3 0.7 0.1], '↵
        LineWidth',0.5, 'MarkerSize',22);
178 end
179 for i=1:nn
180     Xp=data4(i,2);
181     Yp=data4(i,3);
182     text('Position',[Xp,Yp], 'String',i, 'color','r', 'FontName','Lucida ↵
        Bright', 'HorizontalAlignment','center', 'VerticalAlignment','Middle'↵
        , 'FontSize',14);
183 end
184 for i=1:nn
185     Xm=(data4(data2(i,2),2)+data4(data2(i,3),2))/2;
186     Ym=(data4(data2(i,2),3)+data4(data2(i,3),3))/2;
187     text('Position',[Xm,Ym], 'String',i, 'color','b', 'FontName','Lucida ↵
        Bright', 'HorizontalAlignment','center', 'VerticalAlignment','Middle'↵
        , 'FontSize',14);
188     plot([Xm Xm],[Ym Ym], 'Marker','s', 'Color',[1 0.8 0.4], 'LineWidth',0.5,↵
        'MarkerSize',24)
189 end
190 % Visualización de la matriz de rigidez lateral de la estructura
191 f=figure('Name','Matriz de rigidez lateral','NumberTitle','off','↵
```



3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

```

192 Position',[500 500 340 150]);
193 set(gcf,'Color','w')
193 uitable('Parent',f,'Data',KT,'ColumnName',[],'RowName',[],'Position'←
    ,[47.5 25 250 100]);

```

Por resultados se obtiene la matriz de rigidez lateral exhibida en un formato tabular (figura 3.3) y la discretización generada del sistema (figura 3.4).

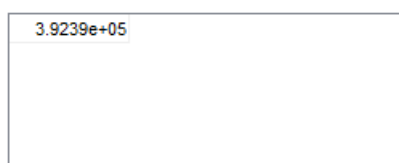


Figura 3.3: Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 1 piso con muros).

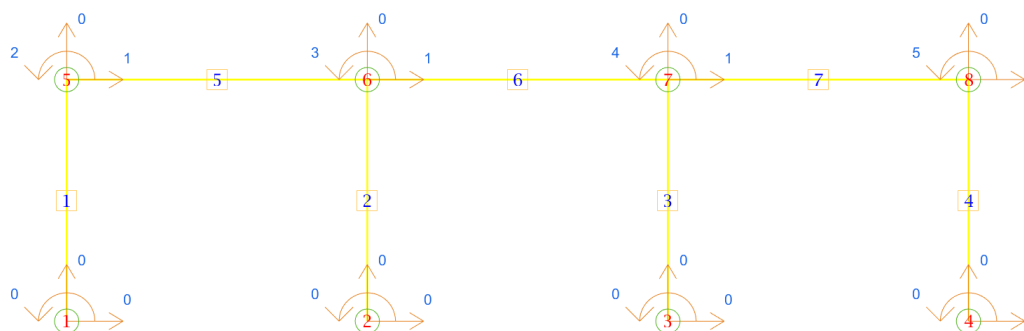


Figura 3.4: Discretización de la estructura (Pórtico de 1 piso con muros).

3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

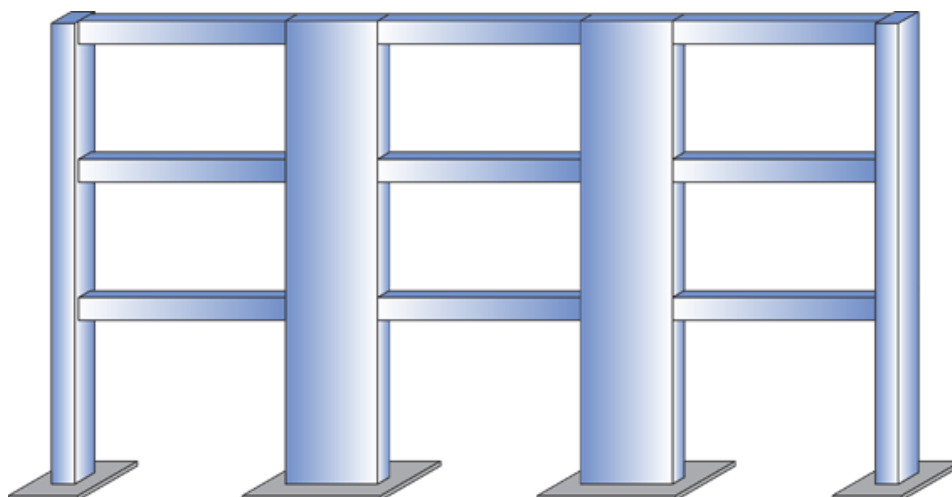
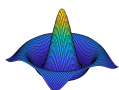


Figura 3.5: Pórtico de 3 pisos con muros.

El pórtico a desarrollarse corresponde a la figura 3.5, donde las masas concentradas del primer, segundo y tercer nivel son: 66.27, 57.39 y 55.52 $\text{kN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$, respectivamente. Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las



3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

secciones transversales son 0.50 m × 0.50 m en columnas, 0.30 m × 2.00 m en muros y 0.30 m × 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad considerado es $E=21316773.9449 \text{ kN/m}^2$.

3.3.1. Matriz de masas

$$C_{\text{con muro}} = \begin{bmatrix} 66.27 & 0 & 0 \\ 0 & 57.39 & 0 \\ 0 & 0 & 55.52 \end{bmatrix} \frac{\text{kN} \cdot \text{s}^2}{m} \quad (3.1)$$

3.3.2. Matriz de rigidez y matriz de rigidez lateral

Comparte las mismas nociones de construcción del pórtico de 1 piso con muros; por lo tanto lo primero será desarrollar un bosquejo de la discretización del sistema (figura 3.6),

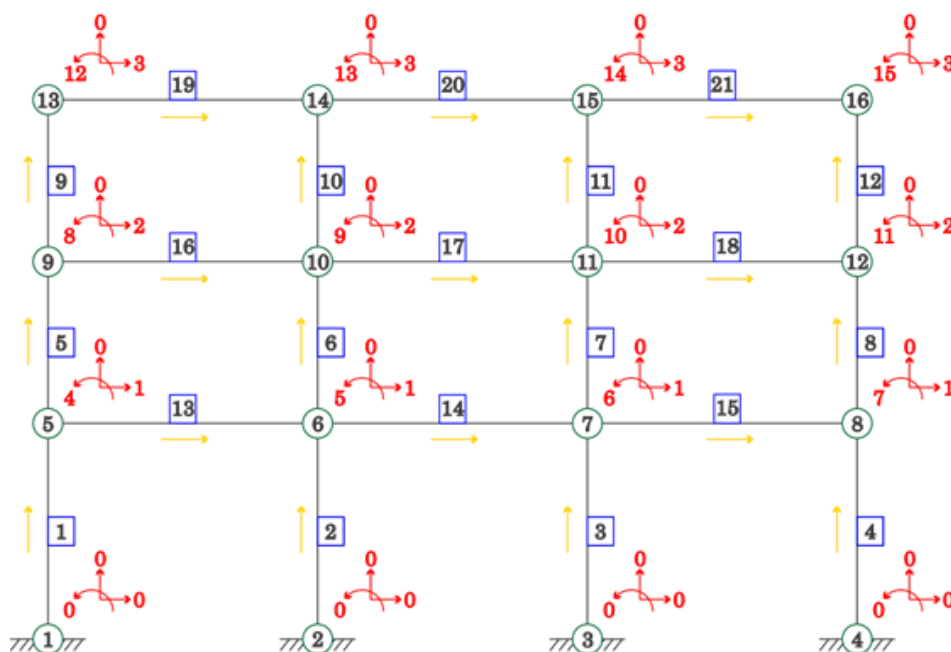
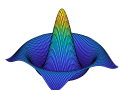


Figura 3.6: Discretización del de 3 pisos con muros.

de tal modo que se establezca un orden competente para el ingreso de datos; dicho orden está plasmado en las matrices de ingreso de datos de las tablas 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10.

# de nodo	# de grado de libertad en X	# de grado de libertad en Y	# de grado de libertad en Z
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	1	0	4
6	1	0	5
7	1	0	6
8	1	0	7
9	2	0	8
10	2	0	9
11	2	0	10

Continúa en la siguiente página ...



3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

# de nodo	# de grado de libertad en X	# de grado de libertad en Y	# de grado de libertad en Z
12	2	0	11
13	3	0	12
14	3	0	13
15	3	0	14
16	3	0	15

Tabla 3.6: Matriz de ingreso **data1** (Pórtico de 3 pisos con muros).

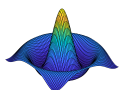
# de miembro	# de nodo cercano	# de nodo lejano
1	1	5
2	2	6
3	3	7
4	4	8
5	5	9
6	6	10
7	7	11
8	8	12
9	9	13
10	10	14
11	11	15
12	12	16
13	5	6
14	6	7
15	7	8
16	9	10
17	10	11
18	11	12
19	13	14
20	14	15
21	15	16

Tabla 3.7: Matriz de ingreso **data2** (Pórtico de 3 pisos con muros).

# de miembro	# de gdlcX	# de gdlcY	# de gdlcZ	# de gdllX	# de gdllY	# de gdllZ
1	0	0	0	1	0	4
2	0	0	0	1	0	5
3	0	0	0	1	0	6
4	0	0	0	1	0	7
5	1	0	4	2	0	8
6	1	0	5	2	0	9
7	1	0	6	2	0	10
8	1	0	7	2	0	11
9	2	0	8	3	0	12
10	2	0	9	3	0	13
11	2	0	10	3	0	14
12	2	0	11	3	0	15
13	1	0	4	1	0	5
14	1	0	5	1	0	6
15	1	0	6	1	0	7
16	2	0	8	2	0	9
17	2	0	9	2	0	10
18	2	0	10	2	0	11
19	3	0	12	3	0	13
20	3	0	13	3	0	14
21	3	0	14	3	0	15

Tabla 3.8: Matriz de ingreso **data3** (Pórtico de 3 pisos con muros).

# de nodo	Coordenada en X	Coordenada en Y
1	0	0
2	5	0
Continúa en la siguiente página ...		



3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

# de nodo	Coordenada en X	Coordenada en Y
3	10	0
4	15	0
5	0	4
6	5	4
7	10	4
8	15	4
9	0	7
10	5	7
11	10	7
12	15	7
13	0	10
14	5	10
15	10	10
16	15	10

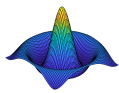
Tabla 3.9: Matriz de ingreso **data4** (Pórtico de 3 pisos con muros).

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
1	21316775.94	0.0052	0
2	21316775.94	0.2000	0.6
3	21316775.94	0.2000	0.6
4	21316775.94	0.0052	0
5	21316775.94	0.0052	0
6	21316775.94	0.2000	0.6
7	21316775.94	0.2000	0.6
8	21316775.94	0.0052	0
9	21316775.94	0.0052	0
10	21316775.94	0.2000	0.6
11	21316775.94	0.2000	0.6
12	21316775.94	0.0052	0
13	21316775.94	0.0031	0
14	21316775.94	0.0031	0
15	21316775.94	0.0031	0
16	21316775.94	0.0031	0
17	21316775.94	0.0031	0
18	21316775.94	0.0031	0
19	21316775.94	0.0031	0
20	21316775.94	0.0031	0
21	21316775.94	0.0031	0

Tabla 3.10: Matriz de ingreso **data5** (Pórtico de 3 pisos con muros).

El código fuente (parcial) para la construcción de la matriz de rigidez lateral del pórtico de 3 pisos con muros se muestra a continuación:

```
1 % Rigidez lateral (Pórticos 2D con muros - elementos axialmente rígidos)
2 % Por: Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco Guzmán López.
3 % Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería Estructural de la
4 % Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc; clear all; close all;
7 % Ingreso de datos
8 data1=[1 0 0 0; 2 0 0 0; 3 0 0 0; 4 0 0 0; 5 1 0 4; 6 1 0 5; 7 1 0 6; 8 ↵
    1 0 7; 9 2 0 8; 10 2 0 9; 11 2 0 10; 12 2 0 11; 13 3 0 12; 14 3 0 13;↵
    15 3 0 14; 16 3 0 15];
9 ndgl=max(max(data1(:,2:4)));
10 [nn,ncdata1]=size(data1);
11 data2=[1 1 5; 2 2 6; 3 3 7; 4 4 8; 5 5 9; 6 6 10; 7 7 11; 8 8 12; 9 9 ↵
    13; 10 10 14; 11 11 15; 12 12 16; 13 5 6; 14 6 7; 15 7 8; 16 9 10; 17↵
    10 11; 18 11 12; 19 13 14; 20 14 15; 21 15 16];
```



3.3. Pórtico bidimensional de 3 pisos con muros

```
12 [nm, ncddata2]=size(data2);
13 for i=1:nm
14     data3(i,1)=i;
15     data3(i,2)=data1(data2(i,2),2);
16     data3(i,3)=data1(data2(i,2),3);
17     data3(i,4)=data1(data2(i,2),4);
18     data3(i,5)=data1(data2(i,3),2);
19     data3(i,6)=data1(data2(i,3),3);
20     data3(i,7)=data1(data2(i,3),4);
21 end
22 data4=[1 0 0; 2 5 0; 3 10 0; 4 15 0; 5 0 4; 6 5 4; 7 10 4; 8 15 4; 9 0 7; 10 5 7; 11 10 7; 12 15 7; 13 0 10; 14 5 10; 15 10 10; 16 15 10];
23 data5=[1 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0; 2 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 3 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 4 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0.6; 5 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0.6; 6 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 7 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 8 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0.6; 9 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0.6; 10 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 11 21316775.9449 (1/12)*0.3*2^3 0.6; 12 21316775.9449 (1/12)*0.5^4 0.6; 13 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 14 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 15 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 16 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 17 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 18 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 19 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 20 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0; 21 21316775.9449 (1/12)*0.3*0.5^3 0];
24 ngdlc=3; % Número de grados de libertad condensados
25 evc=[1 4 5 8 9 12 13:21]; % Elementos viga o columna
26 em=[2 3 6 7 10 11]; % Elementos muro
27 poisson=0.2; % Relación de Poisson (Continúa ...)
```

Por resultados se obtiene la discretización generada del sistema (figura 3.7) y la matriz de rigidez lateral exhibida en un formato tabular (figura 3.8).

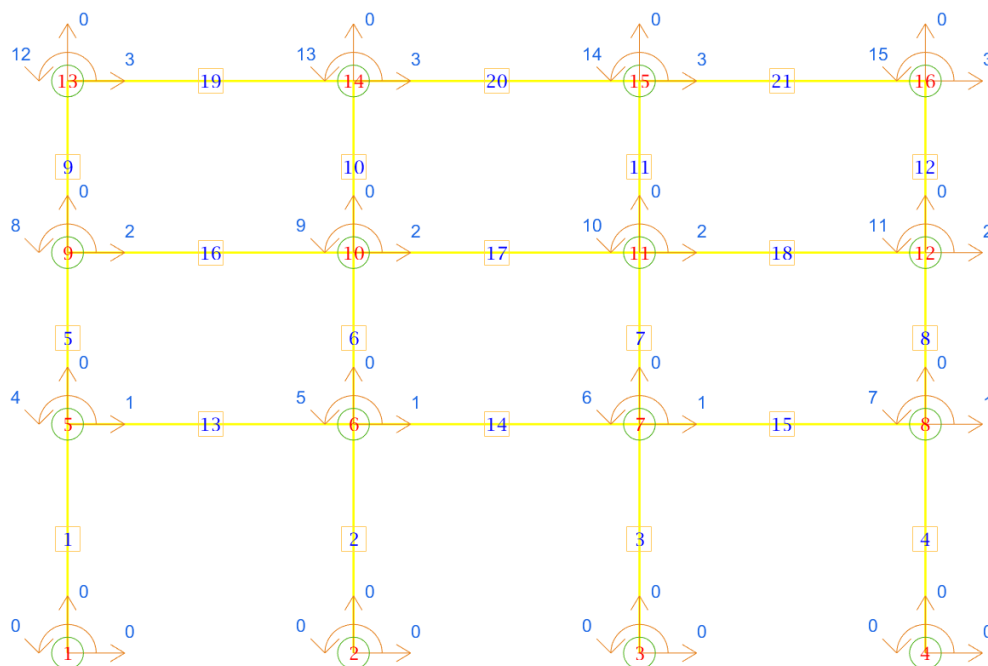
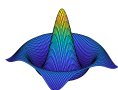


Figura 3.7: Discretización de la estructura (Pórtico de 3 pisos con muros).



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

2.2168e+06	-1.5922e+06	4.1925e+05
-1.5922e+06	2.0510e+06	-8.3856e+05
4.1925e+05	-8.3856e+05	4.4334e+05

Figura 3.8: Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 3 pisos con muros).

3.3.3. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh y Caughey

$$\mathbf{C}_{\text{con muro Rayleigh}} = \begin{bmatrix} 1798.1839 & -1198.5896 & 315.6045 \\ -1198.5896 & 1656.0719 & -631.2494 \\ 315.6045 & -631.2494 & 442.1893 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{C}_{\text{con muro Caughey}} = \begin{bmatrix} 1095.8999 & -478.9003 & 51.9300 \\ -478.9003 & 918.5460 & -361.0401 \\ 51.9300 & -361.0401 & 343.1920 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (3.3)$$

3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

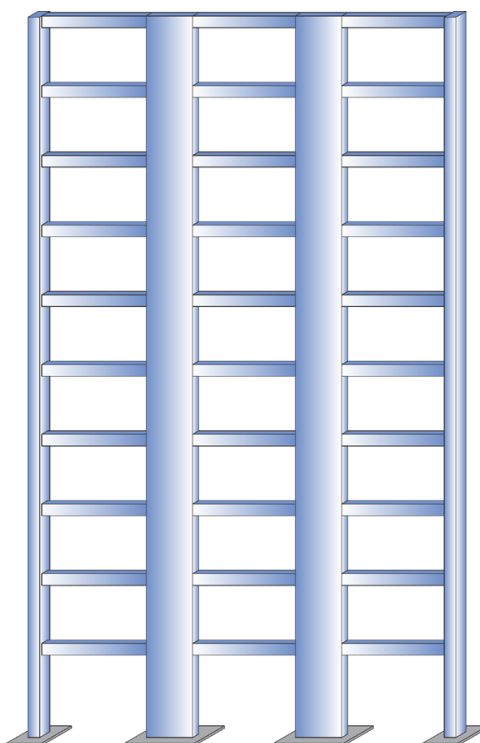
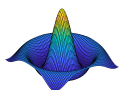


Figura 3.9: Pórtico de 10 pisos con muros.

El pórtico a desarrollarse corresponde a la figura 3.9, donde las masas concentradas del primer al décimo piso son: 66.27, 57.39, 57.39, 57.39, 57.39, 57.39, 57.39, 57.39, 57.39 y 55.52 kN·s²/m, respectivamente. Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

ejes; las dimensiones de las secciones transversales son $0.50 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en columnas, $0.30 \text{ m} \times 2.00 \text{ m}$ en muros y $0.30 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E=21316773.9449 \text{ kN/m}^2$.

3.4.1. Matriz de masa

$$\mathbf{M}_{\text{con muro}} = \begin{bmatrix} 66.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55.52 \end{bmatrix} \frac{\text{kN} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

3.4.2. Matriz de rigidez lateral

Comparte las mismas nociones de construcción del pórtico de 1 piso con muros; por lo tanto lo primero será desarrollar un bosquejo de la discretización del sistema (figura 3.10),

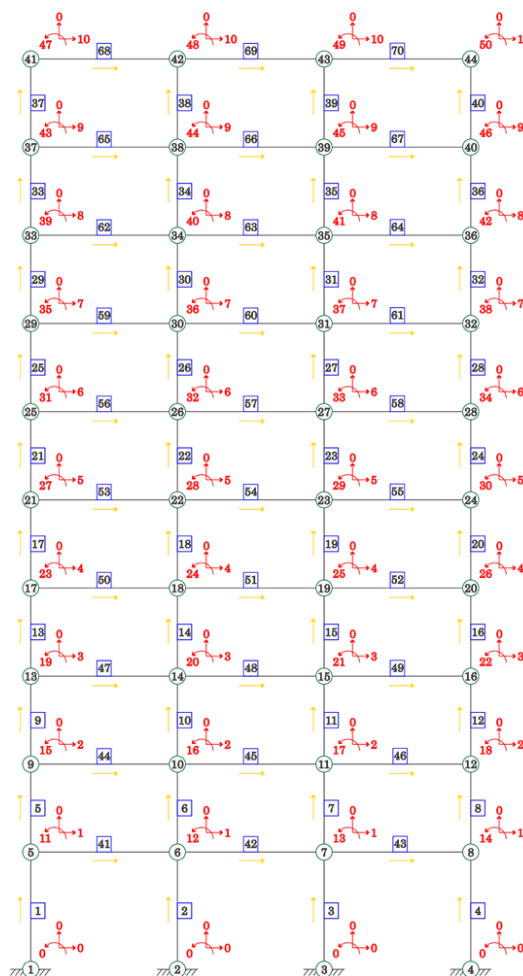
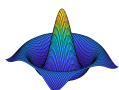


Figura 3.10: Discretización del pórtico de 10 pisos con muros.



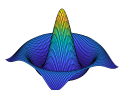
3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

de tal modo que se establezca un orden conveniente para el ingreso de datos; dicho orden está plasmado en las matrices de ingreso de datos de las tablas 3.11, 3.12, 3.13, 3.14 y 3.15.

# de nodo	# de grado de libertad en X	# de grado de libertad en Y	# de grado de libertad en Z
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	1	0	11
6	1	0	12
7	1	0	13
8	1	0	14
9	2	0	15
10	2	0	16
11	2	0	17
12	2	0	18
13	3	0	19
14	3	0	20
15	3	0	21
16	3	0	22
17	4	0	23
18	4	0	24
19	4	0	25
20	4	0	26
21	5	0	27
22	5	0	28
23	5	0	29
24	5	0	30
25	6	0	31
26	6	0	32
27	6	0	33
28	6	0	34
29	7	0	35
30	7	0	36
31	7	0	37
32	7	0	38
33	8	0	39
34	8	0	40
35	8	0	41
36	8	0	42
37	9	0	43
38	9	0	44
39	9	0	45
40	9	0	46
41	10	0	47
42	10	0	48
43	10	0	49
44	10	0	50

Tabla 3.11: Matriz de ingreso **data1** (Pórtico de 10 pisos con muros).

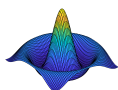
# de miembro	# de nodo cercano	# de nodo lejano
1	1	5
2	2	6
3	3	7
4	4	8
5	5	9
6	6	10
7	7	11
8	8	12
9	9	13
10	10	14
Continúa en la siguiente página ...		



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

# de miembro	# de nodo cercano	# de nodo lejano
11	11	15
12	12	16
13	13	17
14	14	18
15	15	19
16	16	20
17	17	21
18	18	22
19	19	23
20	20	24
21	21	25
22	22	26
23	23	27
24	24	28
25	25	29
26	26	30
27	27	31
28	28	32
29	29	33
30	30	34
31	31	35
32	32	36
33	33	37
34	34	38
35	35	39
36	36	40
37	37	41
38	38	42
39	39	43
40	40	44
41	5	6
42	6	7
43	7	8
44	9	10
45	10	11
46	11	12
47	13	14
48	14	15
49	15	16
50	17	18
51	18	19
52	19	20
53	21	22
54	22	23
55	23	24
56	25	26
57	26	27
58	27	28
59	29	30
60	30	31
61	31	32
62	33	34
63	34	35
64	35	36
65	37	38
66	38	39
67	39	40
68	41	42
69	42	43
70	43	44

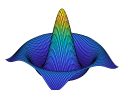
Tabla 3.12: Matriz de ingreso **data2** (Pórtico de 10 pisos con muros).



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

# de miembro	# de gdlcX	# de gdlcY	# de gdlcZ	# de gdllX	# de gdllY	# de gdllZ
1	0	0	0	1	0	11
2	0	0	0	1	0	12
3	0	0	0	1	0	13
4	0	0	0	1	0	14
5	1	0	11	2	0	15
6	1	0	12	2	0	16
7	1	0	13	2	0	17
8	1	0	14	2	0	18
9	2	0	15	3	0	19
10	2	0	16	3	0	20
11	2	0	17	3	0	21
12	2	0	18	3	0	22
13	3	0	19	4	0	23
14	3	0	20	4	0	24
15	3	0	21	4	0	25
16	3	0	22	4	0	26
17	4	0	23	5	0	27
18	4	0	24	5	0	28
19	4	0	25	5	0	29
20	4	0	26	5	0	30
21	5	0	27	6	0	31
22	5	0	28	6	0	32
23	5	0	29	6	0	33
24	5	0	30	6	0	34
25	6	0	31	7	0	35
26	6	0	32	7	0	36
27	6	0	33	7	0	37
28	6	0	34	7	0	38
29	7	0	35	8	0	39
30	7	0	36	8	0	40
31	7	0	37	8	0	41
32	7	0	38	8	0	42
33	8	0	39	9	0	43
34	8	0	40	9	0	44
35	8	0	41	9	0	45
36	8	0	42	9	0	46
37	9	0	43	10	0	47
38	9	0	44	10	0	48
39	9	0	45	10	0	49
40	9	0	46	10	0	50
41	1	0	11	1	0	12
42	1	0	12	1	0	13
43	1	0	13	1	0	14
44	2	0	15	2	0	16
45	2	0	16	2	0	17
46	2	0	17	2	0	18
47	3	0	19	3	0	20
48	3	0	20	3	0	21
49	3	0	21	3	0	22
50	4	0	23	4	0	24
51	4	0	24	4	0	25
52	4	0	25	4	0	26
53	5	0	27	5	0	28
54	5	0	28	5	0	29
55	5	0	29	5	0	30
56	6	0	31	6	0	32
57	6	0	32	6	0	33
58	6	0	33	6	0	34
59	7	0	35	7	0	36
60	7	0	36	7	0	37
61	7	0	37	7	0	38
62	8	0	39	8	0	40
63	8	0	40	8	0	41

Continúa en la siguiente página ...



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

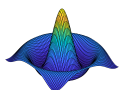
# de miembro	# de gdlcX	# de gdlxY	# de gdlcZ	# de gdllX	# de gdllY	# de gdllZ
64	8	0	41	8	0	42
65	9	0	43	9	0	44
66	9	0	44	9	0	45
67	9	0	45	9	0	46
68	10	0	47	10	0	48
69	10	0	48	10	0	49
70	10	0	49	10	0	50

Tabla 3.13: Matriz de ingreso **data3** (Pórtico de 10 pisos con muros).

# de nodo	Coordenada en X	Coordenada en Y
1	0	0
2	5	0
3	10	0
4	15	0
5	0	4
6	5	4
7	10	4
8	15	4
9	0	7
10	5	7
11	10	7
12	15	7
13	0	10
14	5	10
15	10	10
16	15	10
17	0	13
18	5	13
19	10	13
20	15	13
21	0	16
22	5	16
23	10	16
24	15	16
25	0	19
26	5	19
27	10	19
28	15	19
29	0	22
30	5	22
31	10	22
32	15	22
33	0	25
34	5	25
35	10	25
36	15	25
37	0	28
38	5	28
39	10	28
40	15	28
41	0	31
42	5	31
43	10	31
44	15	31

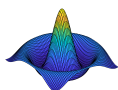
Tabla 3.14: Matriz de ingreso **data4** (Pórtico de 10 pisos con muros).

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
1	21316775.9449	0.0052	0
2	21316775.9449	0.2000	0.60
Continúa en la siguiente página ...			



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
3	21316775.9449	0.2000	0.60
4	21316775.9449	0.0052	0
5	21316775.9449	0.0052	0
6	21316775.9449	0.2000	0.60
7	21316775.9449	0.2000	0.60
8	21316775.9449	0.0052	0
9	21316775.9449	0.0052	0
10	21316775.9449	0.2000	0.60
11	21316775.9449	0.2000	0.60
12	21316775.9449	0.0052	0
13	21316775.9449	0.0052	0
14	21316775.9449	0.2000	0.60
15	21316775.9449	0.2000	0.60
16	21316775.9449	0.0052	0
17	21316775.9449	0.0052	0
18	21316775.9449	0.2000	0.60
19	21316775.9449	0.2000	0.60
20	21316775.9449	0.0052	0
21	21316775.9449	0.0052	0
22	21316775.9449	0.2000	0.60
23	21316775.9449	0.2000	0.60
24	21316775.9449	0.0052	0
25	21316775.9449	0.0052	0
26	21316775.9449	0.2000	0.60
27	21316775.9449	0.2000	0.60
28	21316775.9449	0.0052	0
29	21316775.9449	0.0052	0
30	21316775.9449	0.2000	0.60
31	21316775.9449	0.2000	0.60
32	21316775.9449	0.0052	0
33	21316775.9449	0.0052	0
34	21316775.9449	0.2000	0.60
35	21316775.9449	0.2000	0.60
36	21316775.9449	0.0052	0
37	21316775.9449	0.0052	0
38	21316775.9449	0.2000	0.60
39	21316775.9449	0.2000	0.60
40	21316775.9449	0.0052	0
41	21316775.9449	0.0031	0
42	21316775.9449	0.0031	0
43	21316775.9449	0.0031	0
44	21316775.9449	0.0031	0
45	21316775.9449	0.0031	0
46	21316775.9449	0.0031	0
47	21316775.9449	0.0031	0
48	21316775.9449	0.0031	0
49	21316775.9449	0.0031	0
50	21316775.9449	0.0031	0
51	21316775.9449	0.0031	0
52	21316775.9449	0.0031	0
53	21316775.9449	0.0031	0
54	21316775.9449	0.0031	0
55	21316775.9449	0.0031	0
56	21316775.9449	0.0031	0
57	21316775.9449	0.0031	0
58	21316775.9449	0.0031	0
59	21316775.9449	0.0031	0
60	21316775.9449	0.0031	0
61	21316775.9449	0.0031	0
62	21316775.9449	0.0031	0
63	21316775.9449	0.0031	0
64	21316775.9449	0.0031	0
65	21316775.9449	0.0031	0
Continúa en la siguiente página ...			



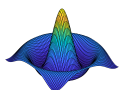
3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

# de miembro	Módulo de elasticidad	Momento de Inercia	Área de la sección transversal
66	21316775.9449	0.0031	0
67	21316775.9449	0.0031	0
68	21316775.9449	0.0031	0
69	21316775.9449	0.0031	0
70	21316775.9449	0.0031	0

Tabla 3.15: Matriz de ingreso **data5** (Pórtico de 10 pisos con muros).

El código fuente (parcial) para la construcción de la matriz de rigidez lateral del pórtico de 10 pisos con muros se muestra a continuación:

```
1 % Rigidez lateral (Pórticos 2D con muros - elementos axialmente rígidos)
2 % Por: Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco Guzmán López.
3 % Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería Estructural de la
4 % Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc; clear all; close all;
7 data1=[1 0 0 0; 2 0 0 0; 3 0 0 0; 4 0 0 0; 5 1 0 11; 6 1 0 12; 7 1 0 13;↵
      8 1 0 14; 9 2 0 15; 10 2 0 16; 11 2 0 17; 12 2 0 18; 13 3 0 19; 14 3↵
      0 20; 15 3 0 21; 16 3 0 22; 17 4 0 23; 18 4 0 24; 19 4 0 25; 20 4 0 ↵
      26; 21 5 0 27; 22 5 0 28; 23 5 0 29; 24 5 0 30; 25 6 0 31; 26 6 0 32;↵
      27 6 0 33; 28 6 0 34; 29 7 0 35; 30 7 0 36; 31 7 0 37; 32 7 0 38; 33↵
      8 0 39; 34 8 0 40; 35 8 0 41; 36 8 0 42; 37 9 0 43; 38 9 0 44; 39 9 ↵
      0 45; 40 9 0 46; 41 10 0 47; 42 10 0 48; 43 10 0 49; 44 10 0 50];
8 ndgl=max(max(data1(:,2:4)));
9 [nn,ncdata1]=size(data1);
10 data2=[1 1 5; 2 2 6; 3 3 7; 4 4 8; 5 5 9; 6 6 10; 7 7 11; 8 8 12; 9 9 ↵
      13; 10 10 14; 11 11 15; 12 12 16; 13 13 17; 14 14 18; 15 15 19; 16 16↵
      20; 17 17 21; 18 18 22; 19 19 23; 20 20 24; 21 21 25; 22 22 26; 23 ↵
      23 27; 24 24 28; 25 25 29; 26 26 30; 27 27 31; 28 28 32; 29 29 33; 30↵
      30 34; 31 31 35; 32 32 36; 33 33 37; 34 34 38; 35 35 39; 36 36 40; ↵
      37 37 41; 38 38 42; 39 39 43; 40 40 44; 41 5 6; 42 6 7; 43 7 8; 44 9 ↵
      10; 45 10 11; 46 11 12; 47 13 14; 48 14 15; 49 15 16; 50 17 18; 51 18↵
      19; 52 19 20; 53 21 22; 54 22 23; 55 23 24; 56 25 26; 57 26 27; 58 ↵
      27 28; 59 29 30; 60 30 31; 61 31 32; 62 33 34; 63 34 35; 64 35 36; 65↵
      37 38; 66 38 39; 67 39 40; 68 41 42; 69 42 43; 70 43 44];
11 [nm, ncdata2]=size(data2);
12 for i=1:nm
13     data3(i,1)=i;
14     data3(i,2)=data1(data2(i,2),2);
15     data3(i,3)=data1(data2(i,2),3);
16     data3(i,4)=data1(data2(i,2),4);
17     data3(i,5)=data1(data2(i,3),2);
18     data3(i,6)=data1(data2(i,3),3);
19     data3(i,7)=data1(data2(i,3),4);
20 end
21 data4=[1 0 0; 2 5 0; 3 10 0; 4 15 0; 5 0 4; 6 5 4; 7 10 4; 8 15 4; 9 0 ↵
      7; 10 5 7; 11 10 7; 12 15 7; 13 0 10; 14 5 10; 15 10 10; 16 15 10; 17↵
      0 13; 18 5 13; 19 10 13; 20 15 13; 21 0 16; 22 5 16; 23 10 16; 24 15↵
      16; 25 0 19; 26 5 19; 27 10 19; 28 15 19; 29 0 22; 30 5 22; 31 10 ↵
      22; 32 15 22; 33 0 25; 34 5 25; 35 10 25; 36 15 25; 37 0 28; 38 5 28;↵
      39 10 28; 40 15 28; 41 0 31; 42 5 31; 43 10 31; 44 15 31];
22 load data5.mat
23 ngdlc=10; % Número de grados de libertad condensados
24 evc=[1 4 5 8 9 12 13 16 17 20 21 24 25 28 29 32 33 36 37 40 41:70]; % ↵
      Elementos viga o columna
```



3.4. Pórtico bidimensional de 10 pisos con muros

```
25 em=[2 3 6 7 10 11 14 15 18 19 22 23 26 27 30 31 34 35 38 39]; % ←
    Elementos muro
26 poisson=0.2; % Relación de Poisson (Continúa ...)
```

Por resultados se obtiene la matriz de rigidez lateral presentada en un formato tabular (figura 3.11) y la discretización generada del sistema (figura 3.12).

2.2194e+06	-1.6246e+06	4.8239e+05
-1.6246e+06	2.5083e+06	-1.7215e+06
4.8239e+05	-1.7215e+06	2.5344e+06
-3.6104e+04	4.8988e+05	-1.7235e+06
3.6104e+04	3.6104e+04	4.8988e+05

Figura 3.11: Matriz de rigidez lateral (Pórtico de 10 pisos con muros).

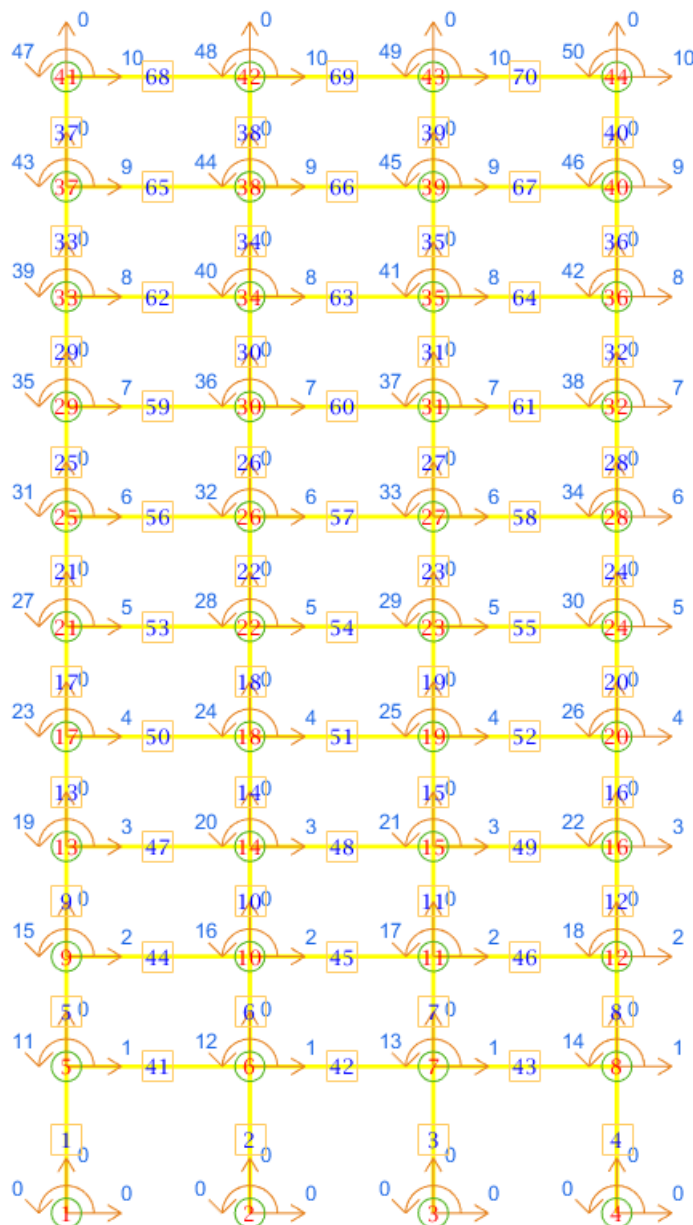
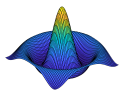
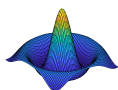


Figura 3.12: Discretización de la estructura (Pórtico de 10 pisos con muros).



3.4.3. Matriz de amortiguamiento de Rayleigh y Caughey

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}_{\text{con muro}}^{\text{Rayleigh}} &= \begin{bmatrix} 8566.7000 & -6249.4000 & 1855.6000 & \dots & -0.0526 & 0.0110 & -0.0018 \\ -6249.4000 & 9674.0000 & -6622.1000 & \dots & 0.2751 & -0.0541 & 0.0086 \\ 1855.6000 & -6622.1000 & 9774.6000 & \dots & -1.6175 & 0.2693 & -0.0404 \\ -138.8843 & 1884.4000 & -6629.9000 & \dots & 12.8939 & -1.5863 & 0.2038 \\ 12.5103 & -141.6607 & 1885.2000 & \dots & -141.7233 & 12.7292 & -1.2474 \\ -1.5489 & 12.8842 & -141.7576 & \dots & 1885.0000 & -140.6242 & 10.5385 \\ 0.2617 & -1.6156 & 12.9009 & \dots & -6628.7000 & 1874.7000 & -120.8402 \\ -0.0526 & 0.2751 & -1.6175 & \dots & 9764.5000 & -6503.0000 & 1637.7000 \\ 0.0110 & -0.0541 & 0.2693 & \dots & -6503.0000 & 8015.1000 & -3232.3000 \\ -0.0018 & 0.0086 & -0.0404 & \dots & 1637.7000 & -3232.3000 & 1730.4000 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \\
 \mathbf{C}_{\text{con muro}}^{\text{Caughey}} &= \begin{bmatrix} 1102.9000 & -468.7611 & 26.0269 & \dots & 0.0215 & 0.0090 & 0.0185 \\ -468.7611 & 1007.1000 & -484.2170 & \dots & -0.0346 & -0.0089 & 0.0686 \\ 26.0269 & -484.2170 & 988.9892 & \dots & -0.2634 & -0.0535 & 0.2073 \\ 1.5452 & 22.1163 & -490.8916 & \dots & -0.5079 & -0.1721 & 0.5704 \\ 1.1751 & -0.0250 & 19.4791 & \dots & -2.7195 & -0.1887 & 1.4578 \\ 0.3414 & 0.5351 & -1.2387 & \dots & 15.7002 & -2.2121 & 3.9189 \\ 0.1127 & 0.0286 & -0.0880 & \dots & -499.5312 & 14.9788 & 8.9174 \\ 0.0215 & -0.0346 & -0.2634 & \dots & 970.8013 & -508.6395 & 44.5909 \\ 0.0090 & -0.0089 & -0.0535 & \dots & -508.6395 & 887.9624 & -374.0118 \\ 0.0185 & 0.0686 & 0.2073 & \dots & 44.5909 & -374.0118 & 329.9543 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m}
 \end{aligned}$$



4. Modelamiento y análisis de pórticos bidimensionales con muros acoplados usando MATLAB®

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta el modelamiento de los ejemplos del capítulo 3 excitado por una aceleración del suelo correspondiente al registro N-S del sismo de Pisco del 15 de agosto del 2007. Se ha omitido el procedimiento matemático del desacoplamiento y desarrollo de las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico de los ejemplos, debido a que es el mismo que se ha presentado en el capítulo 1. Los resultados alcanzados son historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones; así como también, relaciones de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y una visualización interactiva en tiempo real de los desplazamientos ocasionados en los pórticos.

4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

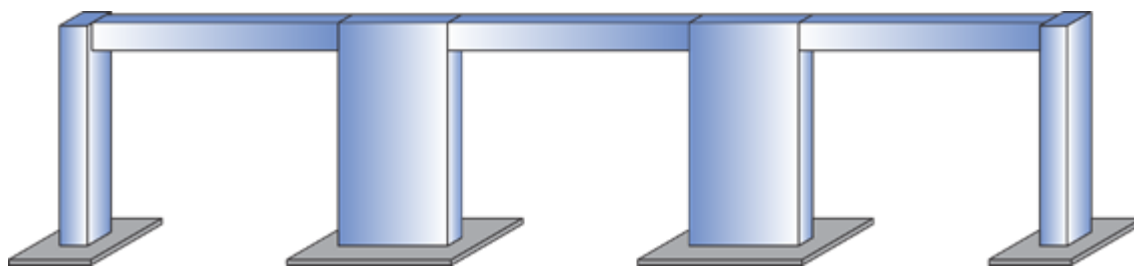
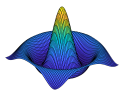


Figura 4.1: Pórtico de 1 piso con muros.

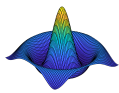
El pórtico bidimensional con muros a desarrollarse corresponde a la figura 4.1; donde la masa concentrada del piso es $m = 66.27 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, la rigidez $k = 392385.1661 \text{ KN/m}$ y la fracción de amortiguamiento $\zeta = 0.05$. Las columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes y tienen una altura de 4.00 m ; las dimensiones de las secciones transversales son $0.50 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en columnas, $0.30 \text{ m} \times 2.00 \text{ m}$ en muros y $0.30 \text{ m} \times 0.50 \text{ m}$ en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E = 21316773.9449 \text{ KN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15 de Agosto del 2007.



4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

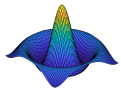
Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis correspondiente se refiere al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis tiempo historia. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e
2 % Ing. Raul Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención
3 % en Ingeniería Estructural de la Universidad Nacional de
4 % Ingeniería.
5 % funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 m=66.27;
9 epsilon=0.05;
10 k=392385.166124141;
11 % Establecimiento del sistema de ecuaciones a resolver
12 A=[0 1; -k/m -2*epsilon*sqrt(k/m)];
13 B=[0; -1];
14 C=[1 0; 0 1; -k/m -2*epsilon*sqrt(k/m)];
15 D=[0; 0; -1];
16 % Establecimiento de la excitación
17 load('Ica.txt')
18 t=Ica(:,1);
19 u=Ica(:,3)/100;
20 % Solución del sistema de ecuaciones
21 x0=[0.00 0.00];
22 sys=ss(A,B,C,D);
23 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
24 % Visualización tabular de resultados
25 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ←
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 485 300]);
26 cnames = {'t','x1','v1','a1'};
27 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[82.5 25 320 255]);
28 % Historial de aceleración del suelo
29 figure('Name','Registro de aceleraciones del suelo','NumberTitle','off',←
    'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
30 subplot(2,1,1)
31 set(gcf,'Color','w'); set(gca,'Color','w');
32 plot(t,u,'Color',[0.87 0.49 0],'LineWidth',0.5), grid on
33 xlim([0 t(end,1)])
34 get(gca, 'XTick');
35 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName','Century')
36 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo','FontSize',24,'FontName'←
    ,'Century','FontWeight','bold')
37 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
38 ylabel('Aceleración del suelo (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century'←
    ')
39 lgd=legend('Sismo de Pisco');
40 lgd.FontSize=20;
41 lgd.FontName='Century';
42 set(gca,'GridAlpha',0.40);
43 % Historiales de desplazamientos
44 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','NumberTitle','off',←
    'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
45 subplot(2,1,1)
46 set(gcf,'Color','w'); set(gca,'Color','w');
47 plot(t,y(:,1),'Color','b','LineWidth',0.5), grid on
```



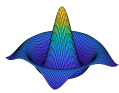
4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

```
48 get(gca, 'XTick');
49 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
50 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
51 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
52 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
53 xlim([0 t(end,1)])
54 lgd=legend('Primer piso');
55 lgd.FontSize=20;
56 lgd.FontName='Century';
57 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
58 % Historiales de velocidades
59 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'NumberTitle', 'off', 'units', ←
    'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
60 subplot(2,1,1)
61 set(gcf, 'Color', 'w'); set(gca, 'Color', 'w');
62 plot(t, y(:,2), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5), grid on
63 get(gca, 'XTick');
64 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
65 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
66 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
67 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
68 xlim([0 t(end,1)])
69 lgd=legend('Primer piso');
70 lgd.FontSize=20;
71 lgd.FontName='Century';
72 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
73 % Historiales de aceleraciones
74 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Aceleración', 'NumberTitle', 'off', 'units' ←
    ', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
75 subplot(2,1,1)
76 set(gcf, 'Color', 'w'); set(gca, 'Color', 'w');
77 plot(t, y(:,3), 'Color', 'g', 'LineWidth', 0.5), grid on
78 get(gca, 'XTick');
79 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
80 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century' ←
    ', 'FontWeight', 'bold')
81 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
82 ylabel('Aceleración (m/s^2)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
83 xlim([0 t(end,1)])
84 lgd=legend('Primer piso');
85 lgd.FontSize=20;
86 lgd.FontName='Century';
87 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
88 % Cálculo de relaciones de distorsiones de entrepiso
89 hor(2)=max(abs([min(y(:,1)) max(y(:,1))]))/4;
90 hor(1)=0;
91 figure('Name', 'Relaciones de derivas de entrepiso', 'NumberTitle', 'off', '←
    Position', [625 100 575 750])
92 set(gcf, 'Color', 'w'); set(gca, 'Color', 'w');
93 x=hor;
94 st=0:1;
95 yy=0:0.001:max(st);
96 xx=interp1(st, x, yy, 'pchip');
97 plot(xx, yy, 'Color', rand(3,1), 'LineWidth', 2)
98 title('Distorsión de entrepisos', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20)
```



4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

```
99 xlabel('Distorsión de entrepiso','FontSize',20,'FontName','Century')
100 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century')
101 hold on, grid on
102 set(gca,'GridAlpha',0.40);
103 % Visualización interactiva de los resultados
104 figure('Name','Visualización interactiva de desplazamientos','↵
    NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
105 set(gcf,'Color','w')
106 set(gca,'Color','w','Visible','off')
107 axis tight
108 x1=150*y(:,1);
109 for q=1:length(x1)
110     y1=4*ones(1,length(x1));
111     plot3([x1(q) 5+x1(q) 10+x1(q) 15+x1(q)],[0 0 0 0],[y1(q) y1(q) y1(q) ↵
        y1(q)], 'Color','r','LineWidth',5)
112     hold on
113     set(gca,'Color','w','Visible','off')
114     plot3([0 x1(q)], [0 0], [0 y1(q)], [15 15+x1(q)], [0 0], [0 y1(q)], 'Color',↵
        'b','LineWidth',5)
115     fill3([4 6 6+x1(q) 4+x1(q)], [0 0 0 0], [0 0 y1(q) y1(q)], 'b')
116     fill3([9 11 11+x1(q) 9+x1(q)], [0 0 0 0], [0 0 y1(q) y1(q)], 'b')
117     fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
118     fill3([3.25 3.25 6.75 6.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
119     fill3([8.25 8.25 11.75 11.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
120     fill3([14.25 14.25 15.75 15.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
121     axis equal
122     axis([-5.5 20.5 -1 1 0 4.05])
123     drawnow
124     pause(0.0125)
125     hold off
126 end
127 % Cálculo de la fuerza cortante máxima
128 fc=k*y(:,1)';
129 calc1=length(y(:,1));
130 for i=1:calc1
131     calc2(i)=sum(fc(:,i));
132 end
133 if abs(min((calc2)))>abs(max((calc2)))
134     [a,ub]=min(calc2);
135 else
136     [a,ub]=max(calc2);
137 end
138 de(1)=y(ub,1);
139 f=k*abs(de)';
140 f(1)=sum(f);
141 % Visualización de la fuerza cortante
142 figure('Name','Fuerza Cortante','NumberTitle','off','Position',[625 100 ↵
    575 750])
143 set(gcf,'Color','w'); set(gca,'Color','w');
144 fill([0 f(1) f(1) 0], [0 0 1 1], 'b'), grid on
145 alpha(0.4)
146 title('Fuerza Cortante','FontName','Century','FontSize',20)
147 xlabel('Fuerza Cortante (kN)','FontSize',20,'FontName','Century','↵
    FontWeight','normal')
148 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight',↵
    'normal')
149 hleg=legend('Fuerza Cortante','Location','NorthEast');
```



4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

```
150 set(hleg, 'FontAngle', 'normal', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 12)
151 hold on
152 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
153 % Visualización del momento flexionante
154 figure('Name', 'Momento flexionante', 'NumberTitle', 'off', 'Position', [625 ←
    100 575 750])
155 set(gcf, 'Color', 'w'); set(gca, 'Color', 'w');
156 m(1)=f(1)*4;
157 fill([0 m(1) 0],[0 0 1], 'r'), grid on
158 alpha(0.4)
159 title('Momento flexionante', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20)
160 xlabel('Momento flexionante (kN-m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'normal')
161 ylabel('Número de piso', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', 'FontWeight', ←
    'normal')
162 hleg=legend('Momento Flexionante', 'Location', 'NorthEast');
163 set(hleg, 'FontAngle', 'normal', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 12)
164 hold on
165 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 4.2). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 4.3). Los valores numéricos en formato tabular (figura 4.4) y gráfico (figuras 4.5, 4.6 y 4.7) de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 4.8).

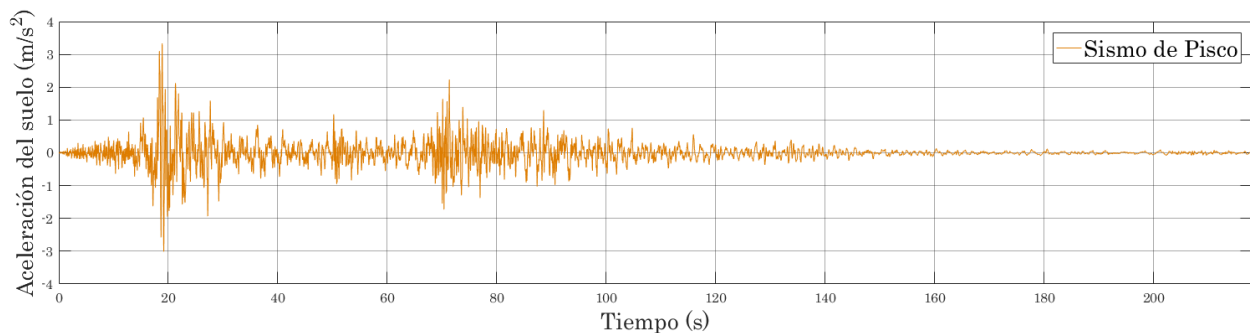


Figura 4.2: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

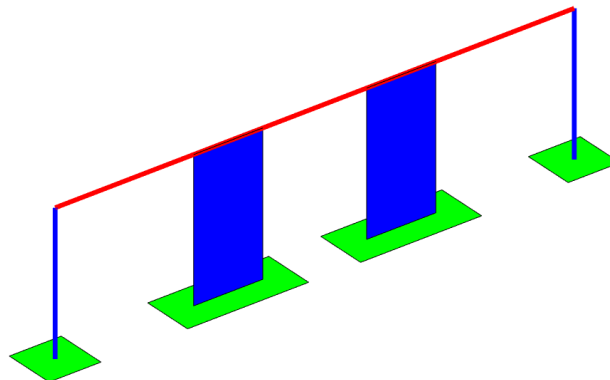
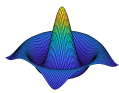


Figura 4.3: Modelo del pórtico de 1 piso con muros.



4.2. Ejemplo: Pórtico de 1 piso con muros

t	x1	v1	a1
0	6.2324e-24	-1.9805e-21	0.0071
0.0100	1.6669e-07	1.4361e-05	-0.0042
0.0200	4.2294e-08	-4.3573e-05	-0.0068
0.0300	-5.9524e-07	-6.9641e-05	0.0017
0.0400	-1.0867e-06	-1.8052e-05	0.0080
0.0500	-9.2408e-07	4.3326e-05	0.0037
0.0600	-4.5858e-07	3.4728e-05	-0.0052
0.0700	-4.7109e-07	-4.5030e-05	-0.0099
0.0800	-1.3838e-06	-1.3223e-04	-0.0067
0.0900	-2.8502e-06	-1.4159e-04	0.0048
0.1000	-3.7278e-06	-7.6686e-06	0.0204
0.1100	-2.6341e-06	2.3516e-04	0.0256
0.1200	7.4966e-07	4.1228e-04	0.0082

Figura 4.4: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

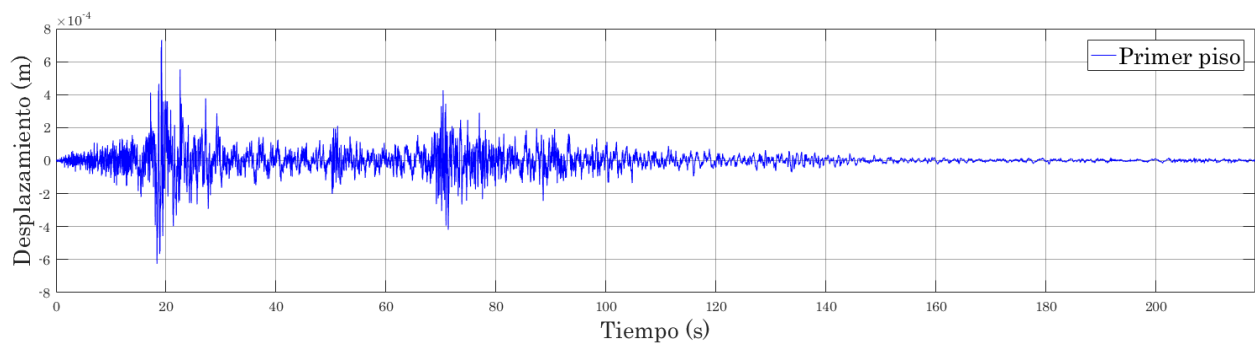


Figura 4.5: Historiales de desplazamientos.

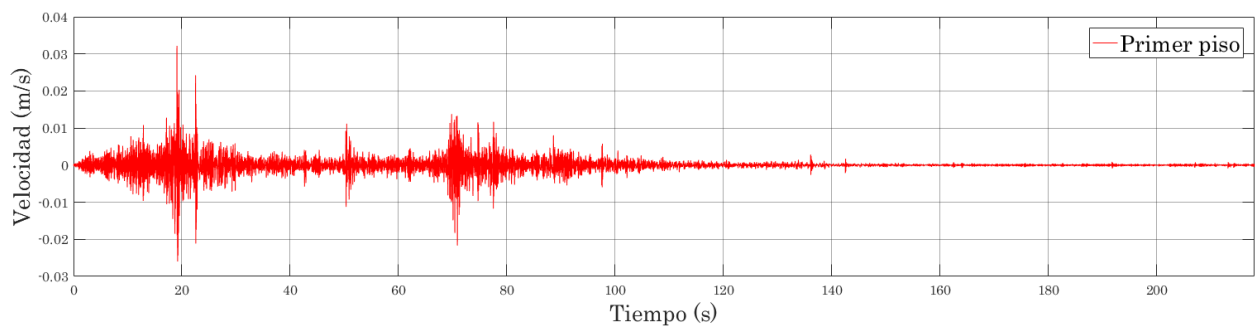


Figura 4.6: Historiales de velocidades.

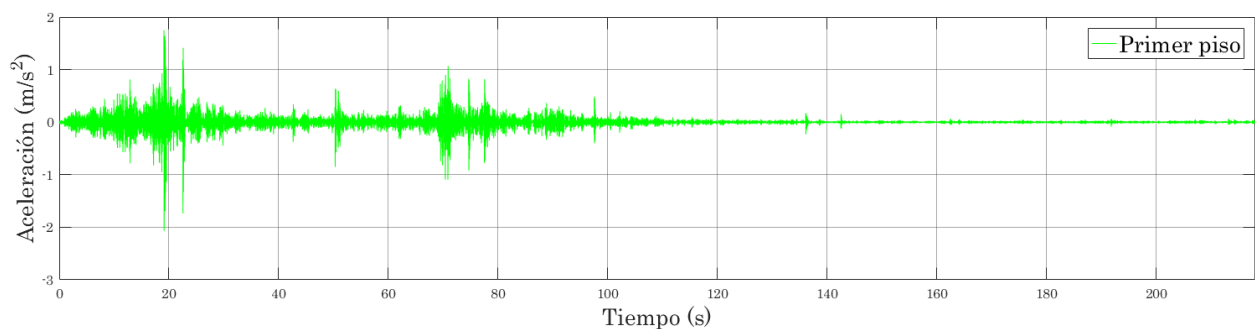
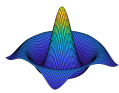


Figura 4.7: Historiales de aceleraciones.



4.3. Pórtico de 3 pisos con muros

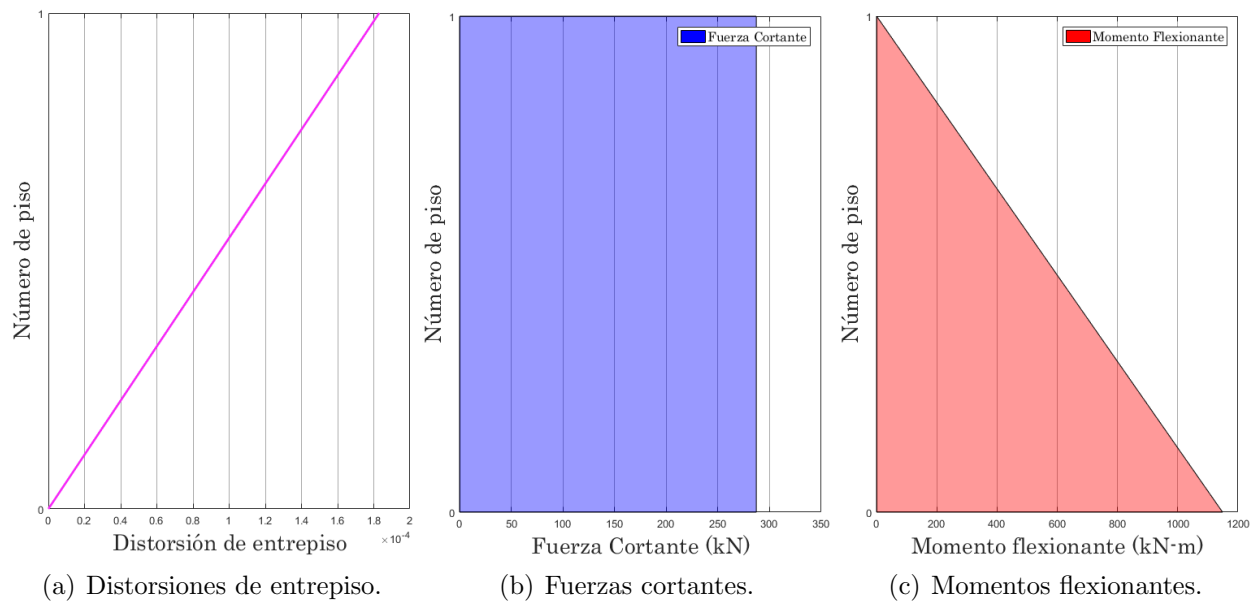


Figura 4.8: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

4.3. Pórtico de 3 pisos con muros

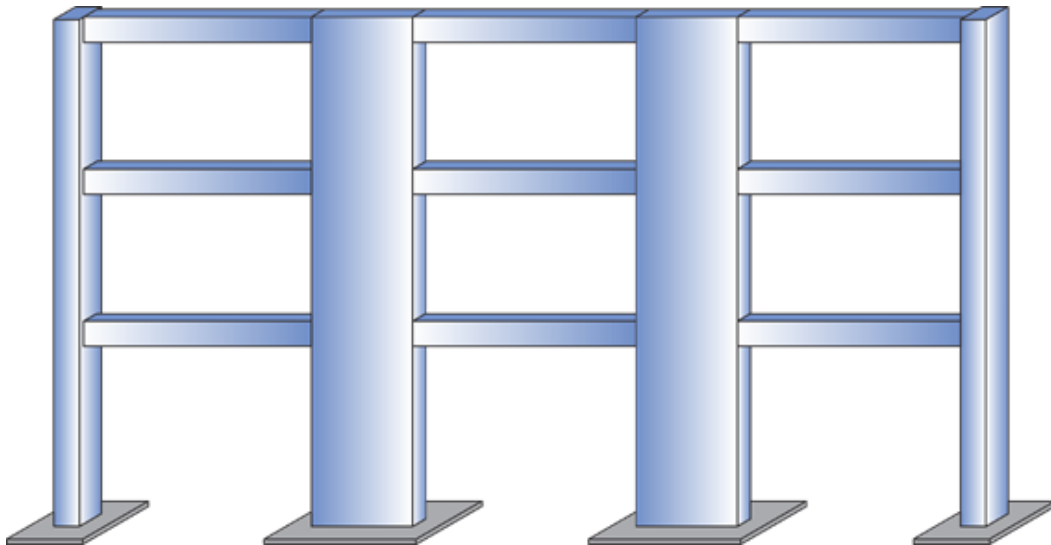
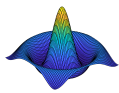


Figura 4.9: Pórtico de 3 pisos con muros.

El pórtico bidimensional con muros a desarrollarse corresponde a la figura 4.9; donde la matriz de masas, rigidez y amortiguamiento corresponden a las expresiones 4.1a, 4.1b y 4.1c, respectivamente. Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m $\times$ 0.50 m en columnas, 0.30 m $\times$ 2.00 m en muros y 0.30 m $\times$ 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad del material considerado es $E = 21316773.9449 \text{ KN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.



4.3. Pórtico de 3 pisos con muros

$$\mathbf{M}_{\text{con muro}} \begin{bmatrix} 66.27 & 0 & 0 \\ 0 & 57.39 & 0 \\ 0 & 0 & 55.52 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{C}_{\text{con muro}} \begin{bmatrix} 1798.1839 & -1198.5896 & 315.6045 \\ -1198.5896 & 1656.0719 & -631.2494 \\ 315.6045 & -631.2494 & 442.1893 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (4.1b)$$

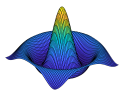
$$\mathbf{K}_{\text{con muro}} \begin{bmatrix} 2216761.2159 & -1592217.4995 & 419251.8812 \\ -1592217.4995 & 2051020.9280 & -838557.5601 \\ 419251.8812 & -838557.5601 & 443340.4501 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (4.1c)$$

Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis correspondiente se refiere al código fuente (parcial) mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis tiempo historia. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing.
2 % Raul Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención en
3 % Ingeniería Estructural de la Universidad Nacional de
4 % Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 M=diag([66.27 57.39 55.52]);
9 C=[1798.18391199937 -1198.58958753683 315.604457034723; ...
10 -1198.58958753683 1656.07194364678 -631.249411855504; ...
11 315.604457034723 -631.249411855504 442.189320066698];
12 K=[2216761.21589943 -1592217.49951764 419251.881245804; ...
13 -1592217.49951764 2051020.92797879 -838557.560125363; ...
14 419251.881245804 -838557.560125363 443340.450098231];
15 calc1=size(M);
16 ndgl=calc1(1);
17 % Establecimiento del sistema de ecuaciones a resolver
18 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
19 B=[zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
20 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
21 D=[zeros(ndgl,1); zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
22 % Establecimiento de la excitación
23 load('Ica.txt')
24 t=Ica(:,1);
25 u=Ica(:,3)/100;
26 % Solución del sistema de ecuaciones
27 x0=[0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00];
28 sys=ss(A,B,C,D);
29 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
30 % Visualización tabular de resultados
31 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ←
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 865 300]);
32 cnames = {'t','x1','x2','x3','v1','v2','v2','a1','a2','a3'};
33 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[50 25 770 255]); % (Continúa ...)
```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 4.10). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 4.11). Los valores



4.3. Pórtico de 3 pisos con muros

numéricos en formato gráfico (figuras 4.12, 4.13 y 4.14) y tabular (figura 4.15) de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 4.16).

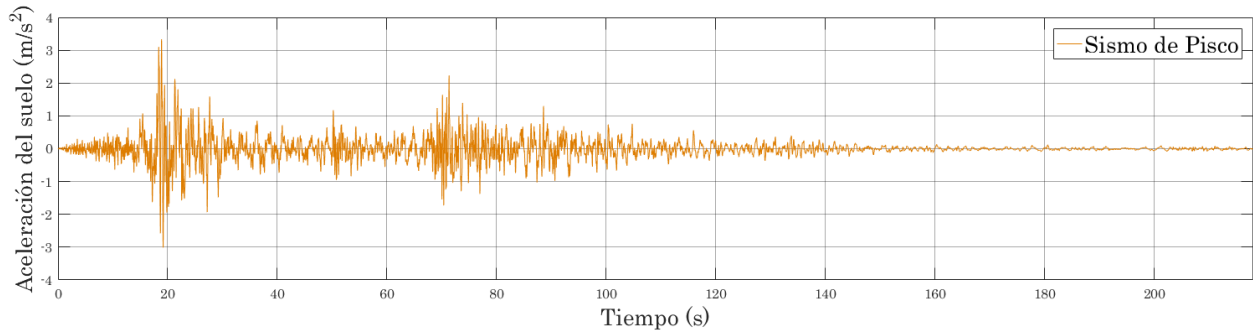


Figura 4.10: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

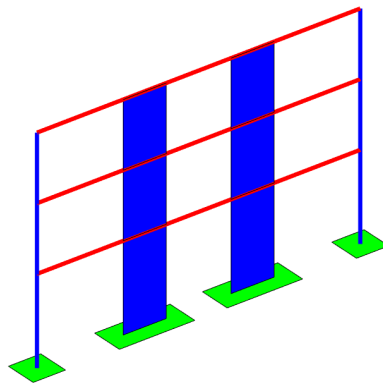


Figura 4.11: Modelo del pórtico de 3 pisos con muros.

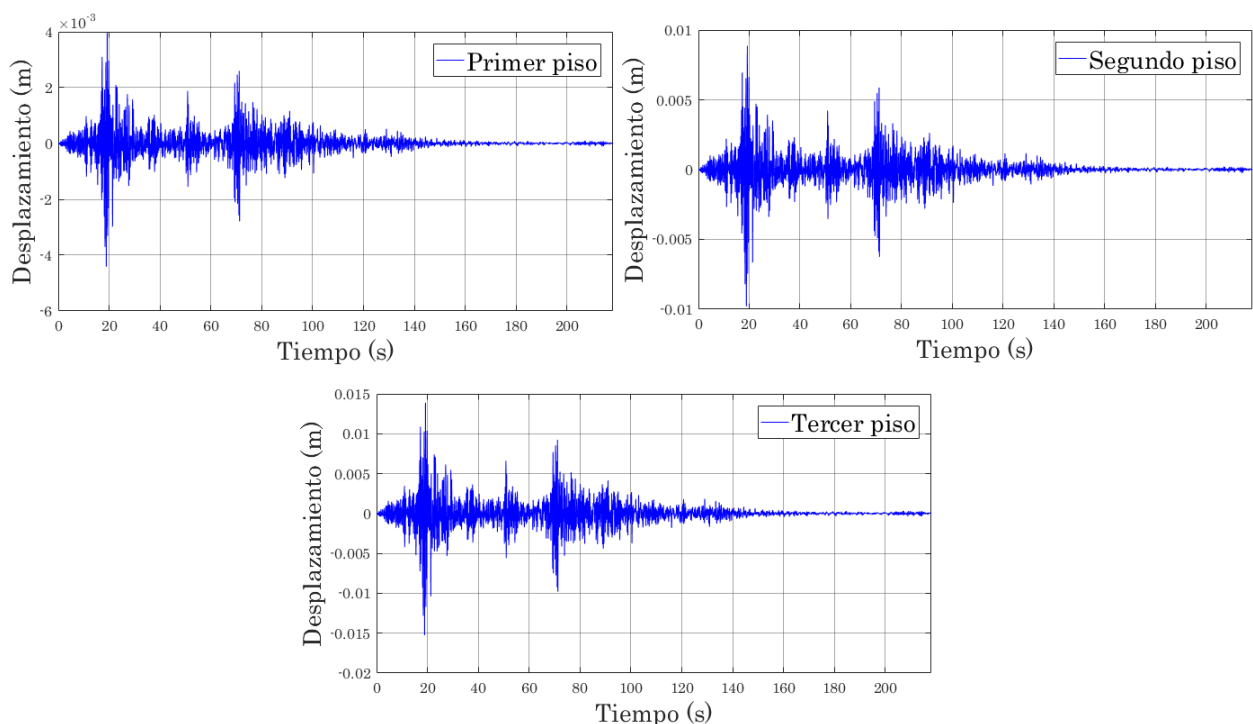
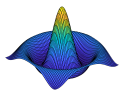


Figura 4.12: Historiales de desplazamientos.



4.3. Pórtico de 3 pisos con muros

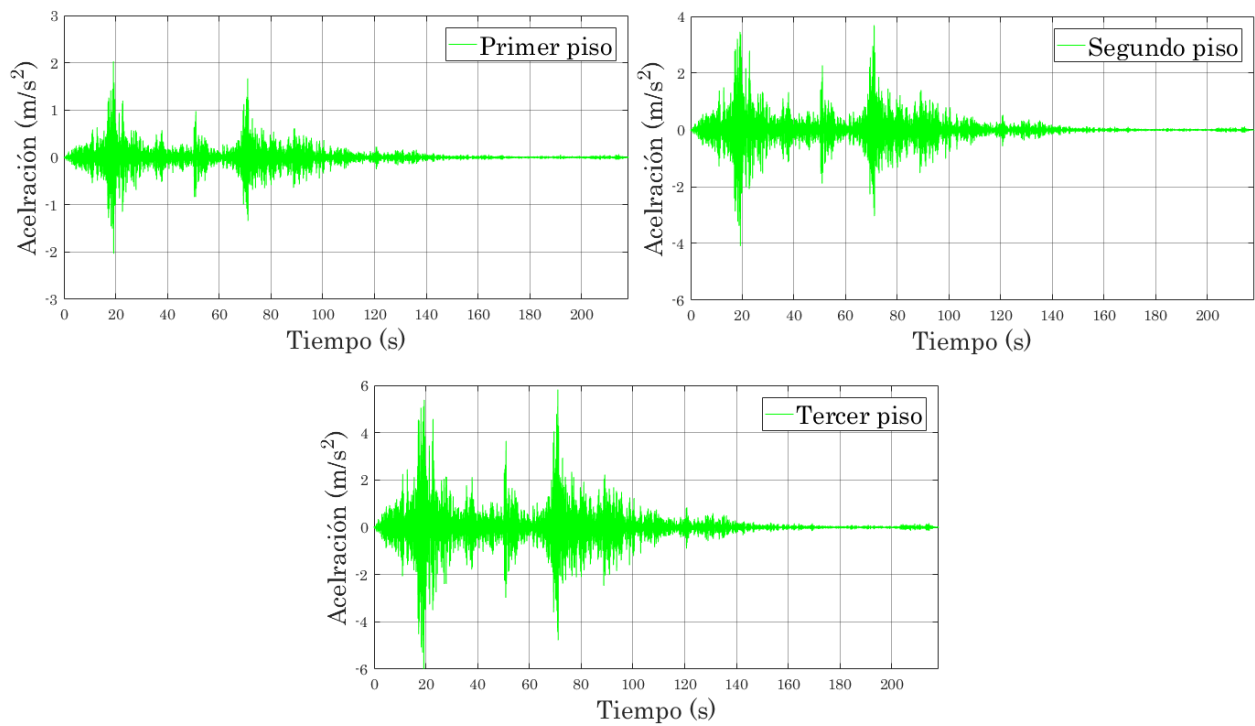


Figura 4.13: Historiales de velocidades.

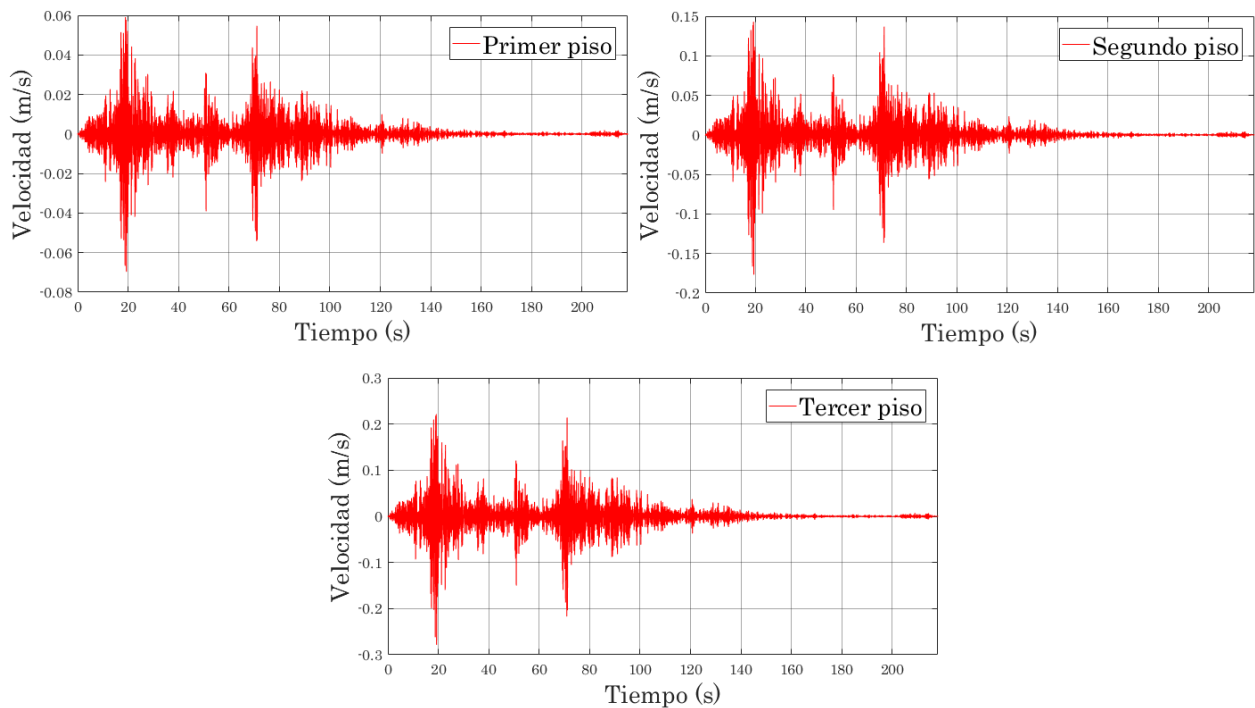
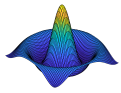


Figura 4.14: Historiales de aceleraciones.



4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

t	x1	x2	x3	v1	v2	v3	a1	a2	a3
0	2.2170e-24	-3.1091e-24	-8.4914e-25	5.9044e-22	-3.1271e-21	3.1289e-21	0.0071	0.0071	0.0071
0.0100	1.4982e-07	1.9179e-07	1.8419e-07	9.8324e-06	2.1369e-05	2.0377e-05	-0.0046	-0.0033	-0.0028
0.0200	3.7852e-09	1.3691e-07	1.9838e-07	-3.8528e-05	-4.1634e-05	-2.3539e-05	-0.0045	-0.0086	-0.0065
0.0300	-4.7933e-07	-5.7469e-07	-3.2823e-07	-4.7118e-05	-8.4725e-05	-7.9340e-05	0.0021	6.8426e-04	-0.0049
0.0400	-7.8424e-07	-1.2686e-06	-1.3217e-06	-8.0889e-06	-4.5866e-05	-1.1266e-04	0.0055	0.0056	-8.2686e-04
0.0500	-6.8186e-07	-1.5557e-06	-2.4728e-06	1.8135e-05	-2.3002e-05	-1.1510e-04	-7.1237e-04	-0.0011	5.2280e-04
0.0600	-6.9864e-07	-1.9877e-06	-3.6423e-06	-3.5338e-05	-7.6807e-05	-1.2463e-04	-0.0089	-0.0091	-0.0030
0.0700	-1.5106e-06	-3.2828e-06	-5.1370e-06	-1.2534e-04	-1.8691e-04	-1.8612e-04	-0.0079	-0.0119	-0.0101
0.0800	-3.0491e-06	-5.6866e-06	-7.6275e-06	-1.7116e-04	-2.8648e-04	-3.2474e-04	-0.0013	-0.0076	-0.0176
0.0900	-4.6603e-06	-8.7786e-06	-1.1750e-05	-1.3783e-04	-3.1831e-04	-4.9650e-04	0.0065	4.4956e-04	-0.0156
0.1000	-5.5778e-06	-1.1732e-05	-1.7223e-05	-3.8056e-05	-2.5395e-04	-5.6771e-04	0.0111	0.0115	0.0026
0.1100	-5.4353e-06	-1.3557e-05	-2.2351e-05	6.0842e-05	-9.9355e-05	-4.1466e-04	0.0079	0.0185	0.0285
0.1200	-4.6417e-06	-1.3708e-05	-2.4810e-05	8.0925e-05	6.0917e-05	-5.3123e-05	-0.0021	0.0138	0.0426

Figura 4.15: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

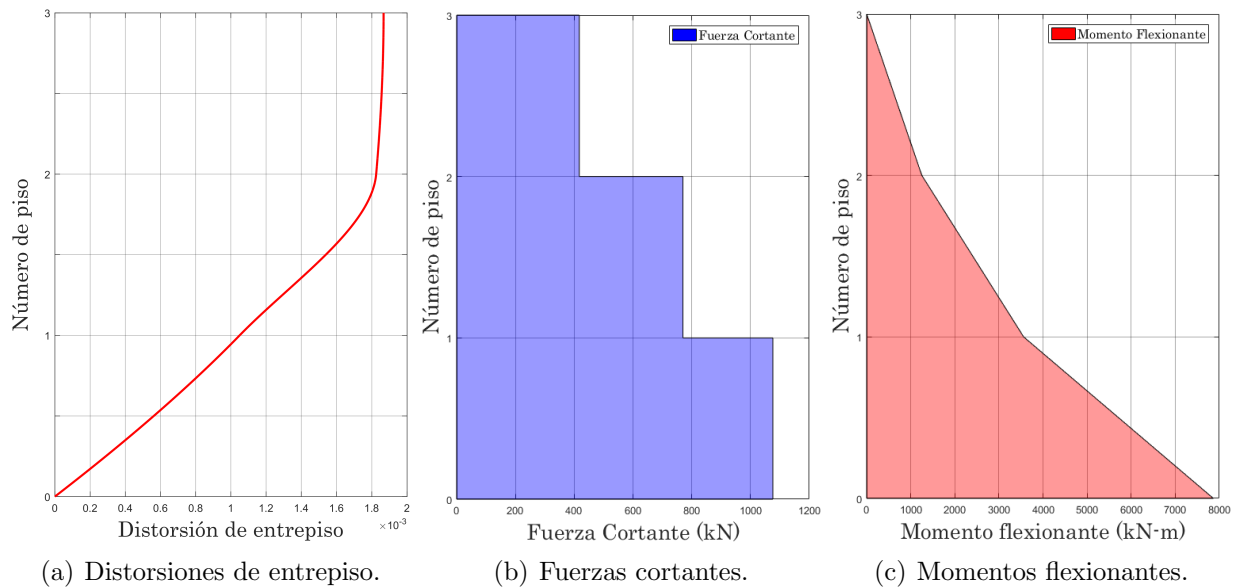
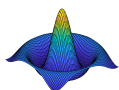


Figura 4.16: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

El pórtico bidimensional con muros a desarrollarse corresponde a la figura 4.17; donde la matriz de masas, amortiguamiento y rigidez se muestran a continuación:

$$\mathbf{M}_{con\ muro} = \begin{bmatrix} 66.27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57.39 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55.52 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m}$$



4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

$$C_{con\ muro} = \begin{bmatrix} 8566.7000 & -6249.4000 & 1855.6000 & \dots & -0.0526 & 0.0110 & -0.0018 \\ -6249.4000 & 9674.0000 & -6622.1000 & \dots & 0.2751 & -0.0541 & 0.0086 \\ 1855.6000 & -6622.1000 & 9774.6000 & \dots & -1.6175 & 0.2693 & -0.0404 \\ -138.8843 & 1884.4000 & -6629.9000 & \dots & 12.8939 & -1.5863 & 0.2038 \\ 12.5103 & -141.6607 & 1885.2000 & \dots & -141.7233 & 12.7292 & -1.2474 \\ -1.5489 & 12.8842 & -141.7576 & \dots & 1885.0000 & -140.6242 & 10.5385 \\ 0.2617 & -1.6156 & 12.9009 & \dots & -6628.7000 & 1874.7000 & -120.8402 \\ -0.0526 & 0.2751 & -1.6175 & \dots & 9764.5000 & -6503.0000 & 1637.7000 \\ 0.0110 & -0.0541 & 0.2693 & \dots & -6503.0000 & 8015.1000 & -3232.3000 \\ -0.0018 & 0.0086 & -0.0404 & \dots & 1637.7000 & -3232.3000 & 1730.4000 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m}$$

$$K_{con\ muro} = \begin{bmatrix} 2219400.0000 & -1624600.0000 & 482390.0000 & \dots & -13.6683 & 2.8652 & -0.4659 \\ -1624600.0000 & 2508300.0000 & -1721500.0000 & \dots & 71.5142 & -14.0692 & 2.2429 \\ 482390.0000 & -1721500.0000 & 2534400.0000 & \dots & -420.4738 & 69.9945 & -10.5018 \\ -36104.0000 & 489880.0000 & -1723500.0000 & \dots & 3351.9000 & -412.3781 & 52.9926 \\ 3252.2000 & -36826.0000 & 490070.0000 & \dots & -36842.0000 & 3309.1000 & -324.2680 \\ -402.6564 & 3349.4000 & -36851.0000 & \dots & 490020.0000 & -36557.0000 & 2739.6000 \\ 68.0338 & -420.0014 & 3353.7000 & \dots & -1723200.0000 & 487350.0000 & -31414.0000 \\ -13.6683 & 71.5142 & -420.4738 & \dots & 2531800.0000 & -1690500.0000 & 425750.0000 \\ 2.8652 & -14.0692 & 69.9945 & \dots & -1690500.0000 & 2077000.0000 & -840260.0000 \\ -0.4659 & 2.2429 & -10.5018 & \dots & 425750.0000 & -840260.0000 & 443470.0000 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m × 0.50 m en columnas, 0.30 m × 2.00 m en muros y 0.30 m × 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad considerado es $E = 21316773.9449 \text{ kN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.

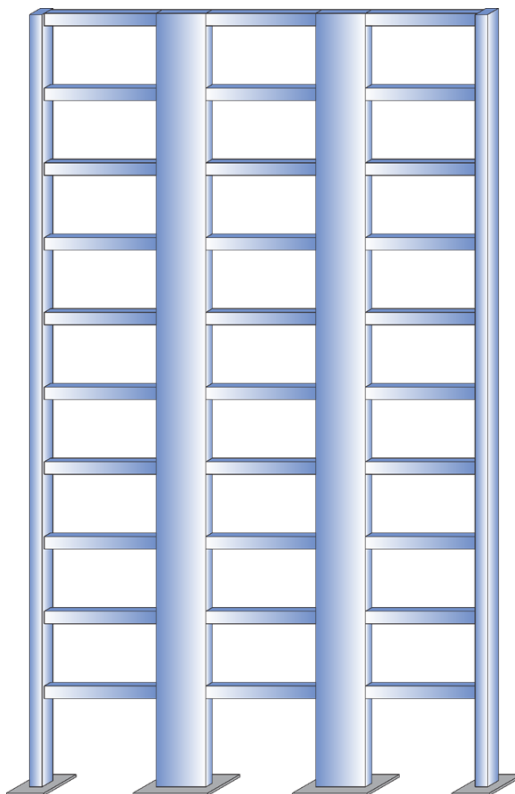


Figura 4.17: Pórtico de 10 pisos con muros.

Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis correspondiente se refiere al código fuente (parcial) mostrado en el siguiente script:

```

1 % Análisis tiempo historia. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e
2 % Ing. Raul Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención
3 % en Ingeniería Estructural de la Universidad Nacional de
4 % Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 load M.mat
9 load C.mat
10 load K.mat
11 calc1=size(M);
12 ndgl=calc1(1);
13 % Establecimiento del sistema de ecuaciones a resolver
14 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
15 B=[zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
16 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
17 D=[zeros(ndgl,1); zeros(ndgl,1); -1*ones(ndgl,1)];
18 % Establecimiento de la excitación
19 load('Ica.txt')
20 t=Ica(:,1);
21 u=Ica(:,3)/100;
22 % Solución del sistema de ecuaciones
23 x0=[0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 ←
      0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00];
24 sys=ss(A,B,C,D);
25 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
26 % Visualización tabular de resultados
27 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ←
      aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 985 300]);
28 cnames = {'t','x1','x2','x3','x4','x5','x6','x7','x8','x9','x10', ...
29           'v1','v2','v3','v4','v5','v6','v7','v8','v9','v10', ...
30           'a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7','a8','a9','a10'};
31 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:,:)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
      Position',[70 25 845 255]); % (Continúa ...)

```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 4.18). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 4.19). Los valores numéricos en formato tabular (figura 4.20) y gráfico (figuras 4.21, 4.22 y 4.23) de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones. La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 4.24).

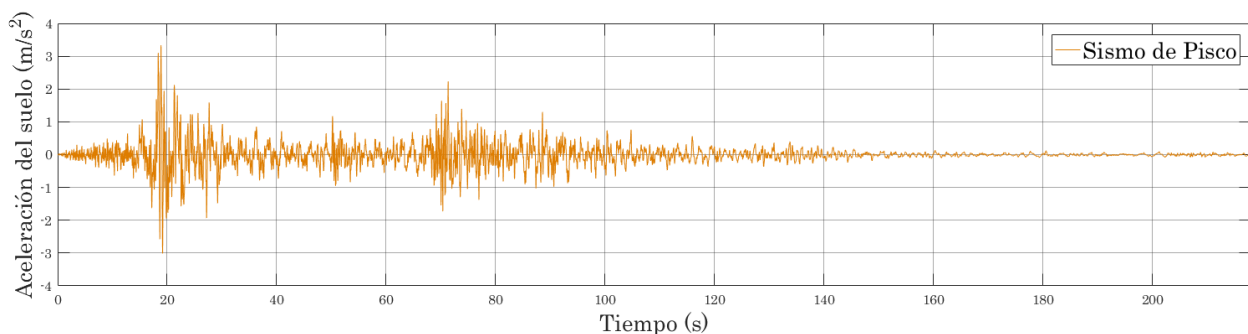
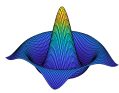


Figura 4.18: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.



4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

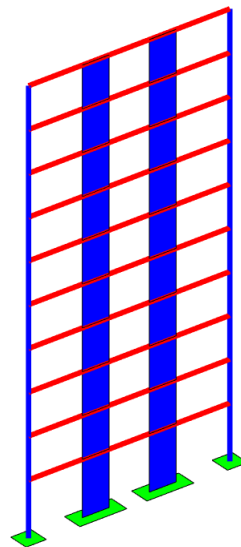


Figura 4.19: Modelo del pórtico de 10 pisos con muros.

t	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
0	9.9265e-25	6.2211e-24	-1.5626e-24	3.9524e-24	-3.3594e-24	1.4332e-24	3.3185e-24	1.5183e-24	-1.4040e-24	2.3442e-24
0.0100	1.3561e-07	1.8936e-07	1.8974e-07	1.8429e-07	1.8345e-07	1.8376e-07	1.8383e-07	1.8382e-07	1.8382e-07	1.8382e-07
0.0200	9.7253e-09	1.1825e-07	1.8366e-07	1.8176e-07	1.6613e-07	1.6177e-07	1.6310e-07	1.6394e-07	1.6393e-07	1.6382e-07
0.0300	-4.1240e-07	-5.3368e-07	-4.5117e-07	-3.7608e-07	-3.7534e-07	-3.9866e-07	-4.0767e-07	-4.0539e-07	-4.0297e-07	-4.0272e-07
0.0400	-7.0513e-07	-1.2352e-06	-1.3774e-06	-1.2780e-06	-1.1836e-06	-1.1774e-06	-1.2070e-06	-1.2214e-06	-1.2186e-06	-1.2121e-06
0.0500	-7.7382e-07	-1.6082e-06	-2.1232e-06	-2.2052e-06	-2.0639e-06	-1.9505e-06	-1.9430e-06	-1.9798e-06	-1.9979e-06	-1.9925e-06
0.0600	-9.5334e-07	-1.9998e-06	-2.8342e-06	-3.2303e-06	-3.2146e-06	-3.0293e-06	-2.9058e-06	-2.9004e-06	-2.9444e-06	-2.9823e-06
0.0700	-1.5630e-06	-3.0293e-06	-4.1536e-06	-4.8374e-06	-5.0595e-06	-4.9380e-06	-4.7147e-06	-4.5907e-06	-4.6102e-06	-4.7016e-06
0.0800	-2.6609e-06	-5.0302e-06	-6.6635e-06	-7.6162e-06	-8.0492e-06	-8.0747e-06	-7.8592e-06	-7.6350e-06	-7.5577e-06	-7.6021e-06
0.0900	-4.0642e-06	-7.8825e-06	-1.0493e-05	-1.1889e-05	-1.2492e-05	-1.2636e-05	-1.2508e-05	-1.2270e-05	-1.2061e-05	-1.1919e-05
0.1000	-5.3056e-06	-1.0881e-05	-1.5014e-05	-1.7263e-05	-1.8163e-05	-1.8380e-05	-1.8308e-05	-1.8082e-05	-1.7756e-05	-1.7396e-05
0.1100	-5.7494e-06	-1.2816e-05	-1.8800e-05	-2.2455e-05	-2.4031e-05	-2.4398e-05	-2.4276e-05	-2.3971e-05	-2.3547e-05	-2.3068e-05

Figura 4.20: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

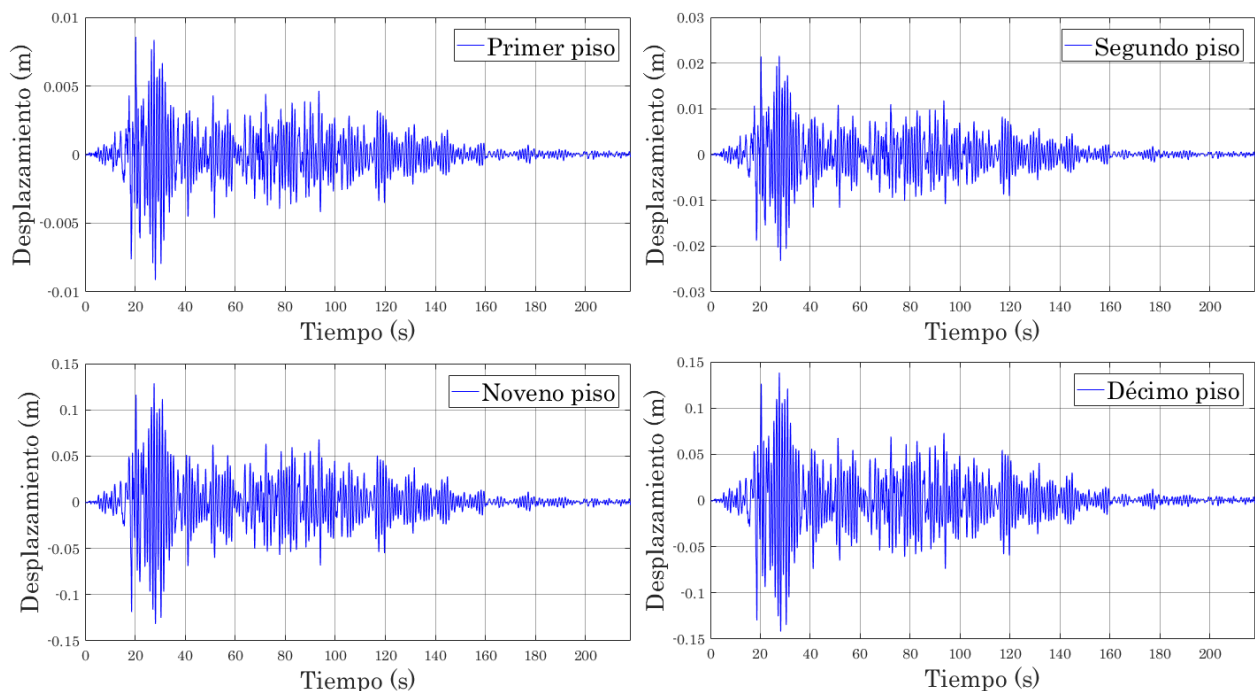
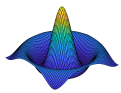


Figura 4.21: Historiales de desplazamientos.



4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

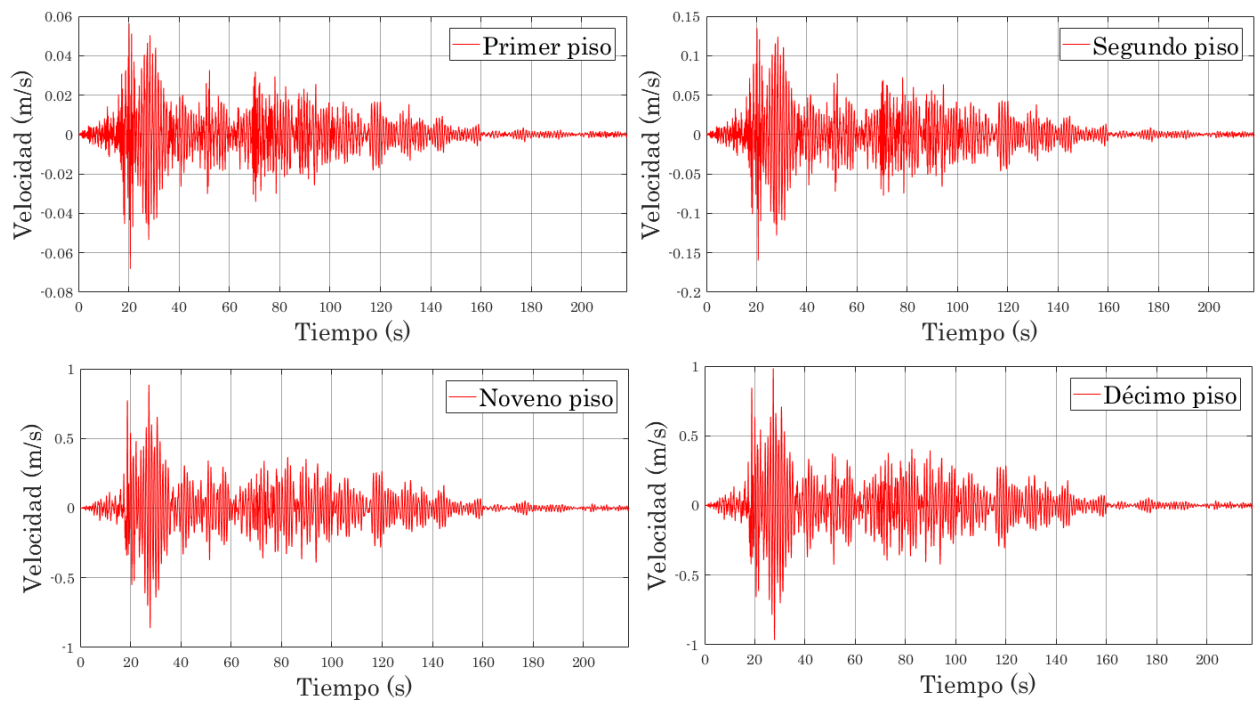


Figura 4.22: Historiales de velocidades.

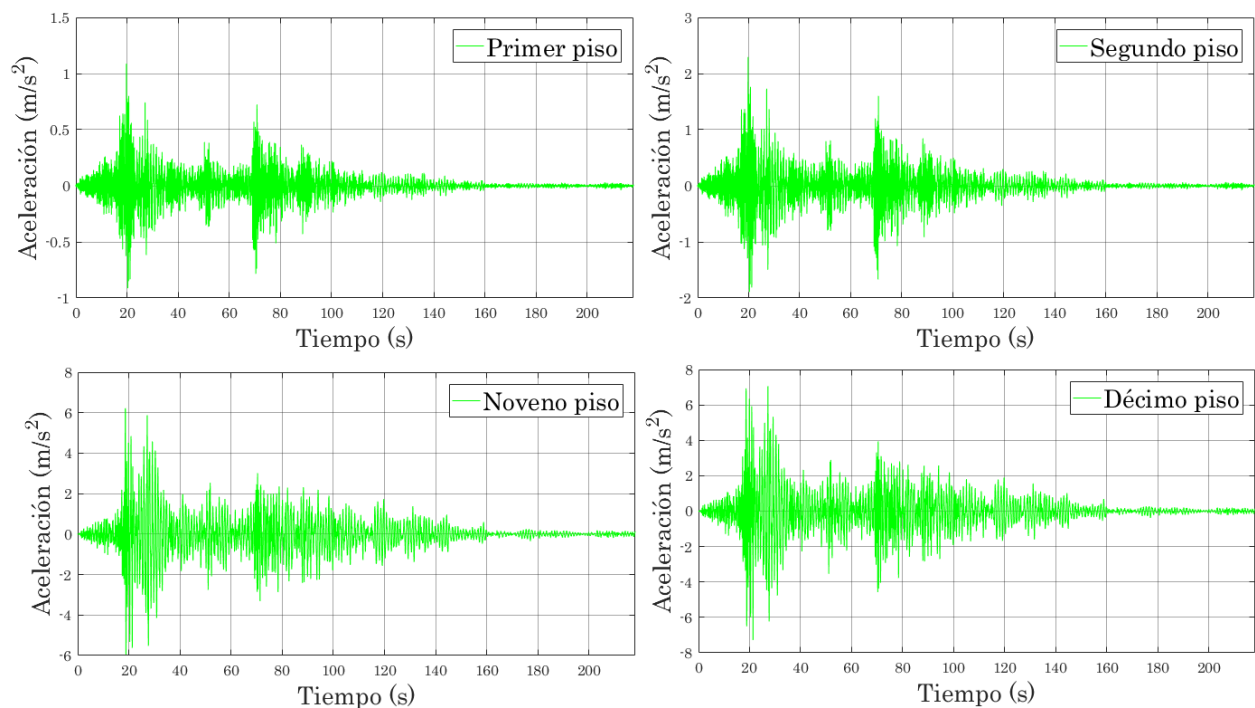
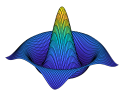


Figura 4.23: Historiales de aceleraciones.



4.4. Pórtico de 10 pisos con muros

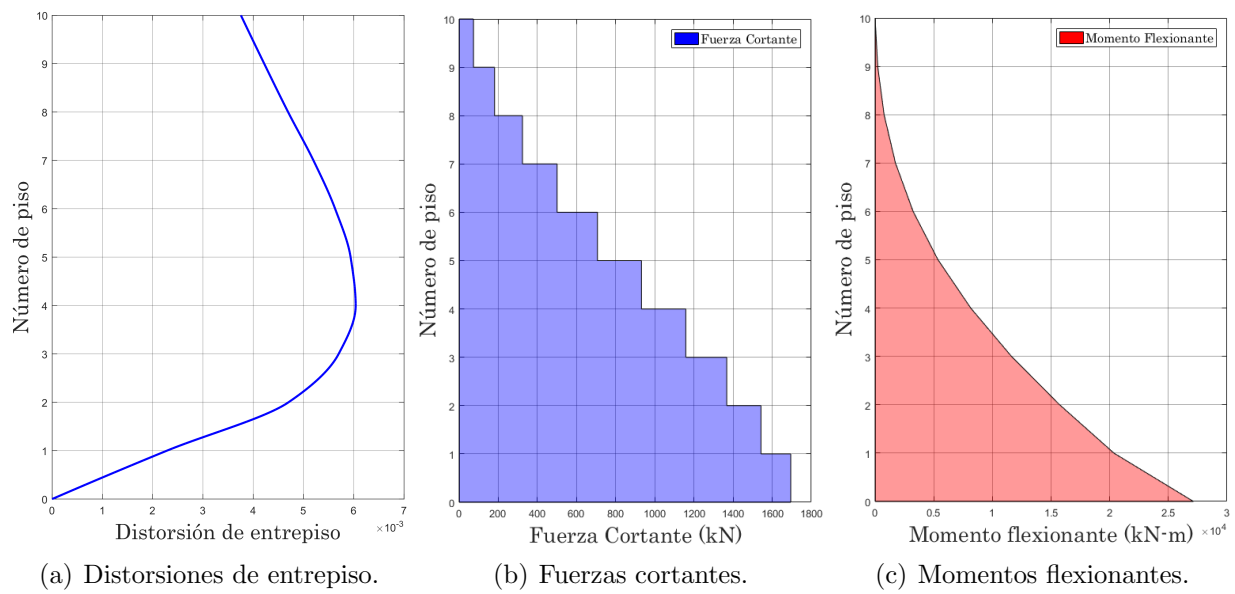
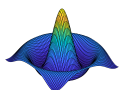


Figura 4.24: Distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



5. Vibración libre

5.1. Introducción

La vibración libre tiene lugar cuando el desplazamiento del sistema se mantiene debido a fuerzas restauradoras. En este capítulo se presenta el procedimiento matemático detallado del planteamiento del problema de valores característicos obtenido a partir de la ecuación diferencial de equilibrio del sistema en vibración libre ($m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$), con el fin de obtener una idea de las características internas del sistema. Las definiciones de estos temas ayudan a comprender el desarrollo de los ejercicios del capítulo 6.

5.2. Vibración libre

La vibración libre ocurre cuando no intervienen fuerzas en los grados de libertad del sistema. Por lo tanto, la ecuación del equilibrio diferencial de equilibrio del sistema es:

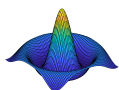
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (5.1)$$

A partir de la formulación de las componentes m , c y k de la ecuación 5.1 se obtendrán datos propios del sistema; como, los modos de vibración, el periodo fundamental del sistema, entre otros.

Por ejemplo, el modelo simplificado de corte mostrado en la figura 5.1, tiene la matriz de rigidez del tipo banda (expresión 5.2), obtenida a partir del método matricial de rigideces;

$$k = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

siendo también, la matriz de amortiguamiento del sistema (expresión 5.3) de una composición similar a la de la rigidez,



5.3. Problema de valores característicos

$$c = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

y, por último, la matriz de masas de configuración diagonal (expresión 5.4).

$$m = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

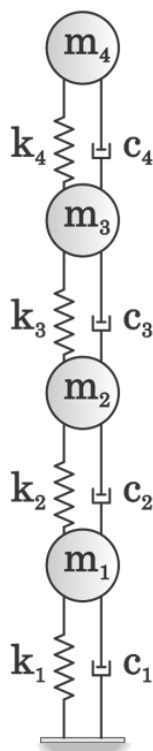


Figura 5.1: Modelo simplificado de corte de edificio de 4 niveles.

A continuación, se presentan dos conceptos importantes que consecuentemente servirán de base para realizar análisis modales.

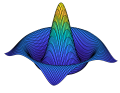
5.3. Problema de valores característicos

Es propicio no considerar el amortiguamiento en la ecuación 5.1, por simplicidad, a fin de obtener la expresión del problema de valores característicos. Siendo la ecuación diferencial de equilibrio del sistema, entonces, la ecuación 5.5;

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (5.5)$$

que al dividirla entre la masa resulta la ecuación 5.6, donde ω_n es la frecuencia circular natural de vibración.

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (5.6)$$



5.3. Problema de valores característicos

La solución complementaria de la ecuación diferencial homogénea (ecuación 5.6) corresponde a la ecuación 5.7;

$$u(t) = A \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (5.7)$$

cuya segunda derivada de la ecuación 5.7, resulta ser la ecuación 5.8;

$$\ddot{u}(t) = -A\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (5.8)$$

donde se tiene que A es la amplitud y ϕ es un ángulo de fase definido por las constantes pertenecientes a la solución general de la ecuación diferencial de un movimiento libre no amortiguado.

La solución complementaria y su segunda derivada, en representación matricial, para un sistema de varios grados de libertad, se muestran en las ecuaciones de la expresión 5.9,

$$u(t) = X \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad \wedge \quad \ddot{u}(t) = -X\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (5.9)$$

que al ser reemplazadas en la ecuación 5.5, resulta la ecuación 5.10,

$$m(-X\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)) + k(X \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)) = 0 \quad (5.10)$$

obteniéndose finalmente la expresión del problema de valores característicos (ecuaciones de las expresiones 5.11a y 5.11b).

$$kX - \omega_n^2 mX = 0 \quad \vee \quad |k - \omega_n^2 m| = 0 \quad (5.11a)$$

$$kX = \omega_n^2 mX \quad \vee \quad AX = \lambda BX \quad (5.11b)$$

De las ecuaciones de las expresiones 5.11a y 5.11a se obtendrán los vectores propios X_i (o los modos de forma) y los valores propios $\lambda_i = \omega_{ni}^2$. Para cada valor propio se obtiene consecuentemente su periodo natural $T_i = 2\pi/\omega_{ni}$.

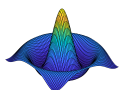
Una propiedad derivada del problema de valores característicos, debida a las características de las matrices de masa y rigidez, es la propiedad de ortogonalidad. La cual determina para los modos de forma de diferentes frecuencias angulares, las siguientes expresiones:

$$X_i^T m X_j = 0 \quad (5.12a)$$

$$X_i^T k X_j = 0 \quad (5.12b)$$

5.3.1. Normalización de los modos de forma

Utilizar un factor de escalamiento en los modos de forma, es provechoso, ya que permite nivelar los términos de los modos de forma con respecto a varios grados de libertad. La opción más oportuna se da al escalar los términos de un modo de forma con respecto a su primer término (expresión 5.13), convirtiendo su primer término en la unidad.



5.3. Problema de valores característicos

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{1i}/x_{1i} \\ x_{2i}/x_{1i} \\ x_{3i}/x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni}/x_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{2i}/x_{1i} \\ x_{3i}/x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni}/x_{1i} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

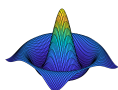
A menudo, como consecuencia de la simpleza de los cálculos, se escala los modos de forma con respecto a la masa. Dicho procedimiento de escalamiento es propiamente conocido como normalización de los modos de forma.

Siendo la expresión 5.14 para obtener los modos de forma normalizados Φ ;

$$\Phi_i = \frac{X_i}{\sqrt{X_i^T m X_i}} \quad (5.14)$$

y cumpliéndose el producto matricial mostrado en la expresión 5.15, donde 1 es la matriz identidad.

$$\Phi_i^T m \Phi_i = 1 \quad (5.15)$$



6. Análisis modal usando MATLAB®

6.1. Introducción

En este capítulo se presenta la aplicación de los dos conceptos descendientes de la vibración libre de un sistema, presentados en el capítulo 5; los cuales son la introducción al análisis modal. El análisis modal se define como una técnica para transformar un sistema de ecuaciones expresado en coordenadas físicas a un sistema de ecuaciones expresado en coordenadas modales a través del uso de valores y vectores propios.

Los ejemplos presentados son sistemas en vibración libre no amortiguada, vibración forzada no amortiguada y vibración forzada amortiguada, resueltos a partir de análisis modales.

6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

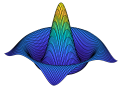
La base del planteamiento del problema es la ecuación diferencial de equilibrio de un sistema no amortiguado en vibración libre, vista anteriormente pero que se vuelve a mostrar aquí:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (6.1)$$

A continuación, se presenta la deducción de las ecuaciones modales de un sistema en vibración libre y la solución mediante código fuente de MATLAB® del mismo sistema. Habiendo también un ejemplo con más pisos, con la finalidad de ilustrar el procedimiento que conlleva a su resolución.

6.2.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema en vibración libre (2 pisos)

Realizar el análisis modal del sistema estructural correspondiente al mostrado en la figura 6.1, asumiendo un modelo simplificado de viga en voladizo; al cual le corresponden los siguientes datos: $m_1 = 21.63 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $m_2 = 19.23 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $k_{11} = 140323.1055 \text{ kN/m}$, $k_{12} = -98688.7775 \text{ kN/m}$, $k_{21} = -98688.7775 \text{ kN/m}$ y $k_{22} = 98688.7775 \text{ kN/m}$.



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

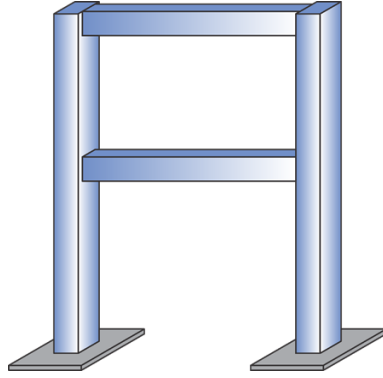


Figura 6.1: Pórtico bidimensional de 2 niveles.

Solución: El procedimiento detallado para realizar el análisis modal se describe a continuación:

Se construyen las matrices de masa y rigidez del sistema, mostradas en las expresiones 6.2a y 6.2b, respectivamente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{22} & k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \quad (6.2b)$$

Siendo la ecuación compacta y la ecuación matricial de equilibrio del sistema en vibración libre, las mostradas en la ecuación 6.3a y 6.3b, respectivamente.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = 0 \quad (6.3a)$$

$$\begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3b)$$

Luego, con las matrices masa $\mathbf{M}$ y rigidez $\mathbf{K}$ se plantea el problema de valores característicos, mostrado en la ecuación 6.4;

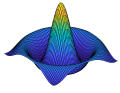
$$\begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} [\phi] = \omega^2 \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} [\phi] \quad (6.4)$$

o de forma conveniente reescribir la ecuación 6.4 a la ecuación 6.5, donde se despeja la ecuación para obtener todas las variables en un solo lado de la ecuación.

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 - 21.63\omega^2 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23\omega^2 \end{bmatrix} [\phi] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Oportunamente, se elabora el arreglo de la forma de un determinante (ecuación 6.6) para conseguir una solución no trivial de la ecuación homogénea; y obtener los valores y vectores propios.

$$\begin{vmatrix} 140323.1055 - 21.63\omega^2 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.6)$$



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

Los resultados del problema de valores característicos corresponden a los valores propios dados en la expresión 6.7,

$$\omega_1^2 = 923.5633 \quad \wedge \quad \omega_2^2 = 10695.8882 \quad (6.7)$$

a partir de los cuales se obtienen las frecuencias naturales de vibración (expresión 6.8). Para continuar con el procedimiento, tener en cuenta que las frecuencias naturales obtenidas se deben ordenar de menor a mayor.

$$\omega_1 = 30.3902 \quad \wedge \quad \omega_2 = 103.4209 \quad (6.8)$$

Para hallar los vectores propios habrá que reemplazar los valores propios de la expresión 6.7 en la ecuación 6.5, obteniendo las ecuaciones 6.9a y 6.9b; cuyos resultados son los vectores propios correspondientes a las expresiones 6.10a y 6.10b.

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 - 21.63(923.56) & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23(923.56) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.9a)$$

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 - 21.63(10695.89) & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23(10695.89) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.9b)$$

$$\therefore \phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1411 \\ -0.1721 \end{bmatrix} \quad (6.10a)$$

$$\therefore \phi_2 = \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1622 \\ 0.1496 \end{bmatrix} \quad (6.10b)$$

Después, se realiza un procedimiento de escalamiento en los vectores propios, el cual consta en dividir todos los elementos del vector entre el elemento de mayor valor numérico absoluto; siendo los resultados las expresiones 6.11a y 6.11b.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} -0.1411 / -0.1721 \\ -0.1721 / -0.1721 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8200 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad (6.11a)$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} -0.1622 / -0.1622 \\ 0.1496 / -0.1622 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -0.9224 \end{bmatrix} \quad (6.11b)$$

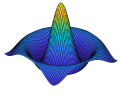
Ahora, se requiere normalizar los vectores ϕ_1 y ϕ_2 con la finalidad de obtener las masas generalizadas con valores iguales a la unidad; dicho procedimiento de normalizar sólo se realiza con respecto a las masas. Los vectores propios normalizados $\hat{\phi}_1$ y $\hat{\phi}_2$ son equivalentes a los vectores propios ϕ_n multiplicados por unas constantes c_n ; dichas constantes son calculadas en la secuencia de expresiones 6.12a, 6.12b, 6.12c y 6.12d.

$$1 = \hat{\phi}_1^T \mathbf{M} \hat{\phi}_1 = (c_1 \phi_1^T) \mathbf{M} (c_1 \phi_1) = c_1^2 \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 = c_1^2 (33.7754) \quad (6.12a)$$

$$c_1 = 0.1721 \quad (6.12b)$$

$$1 = \hat{\phi}_2^T \mathbf{M} \hat{\phi}_2 = (c_2 \phi_2^T) \mathbf{M} (c_2 \phi_2) = c_2^2 \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 = c_2^2 (37.9907) \quad (6.12c)$$

$$c_2 = 0.1622 \quad (6.12d)$$



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

Los nuevos vectores propios (normalizados) vuelven a ser renombrados por ϕ_n y son mostrados en las expresiones 6.13a y 6.13b.

$$\phi_1 = 0.1721 \begin{bmatrix} 0.8200 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1411 \\ 0.1721 \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

$$\phi_2 = 0.1622 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.9224 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1622 \\ -0.1496 \end{bmatrix} \quad (6.13b)$$

La representación de la matriz de vectores propios ϕ (normalizada) está dada en la expresión 6.14;

$$\phi = [\phi_1 \ \phi_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1411 & 0.1622 \\ 0.1721 & -0.1496 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

la cual se comprueba es correcta, ya que al realizar la operación $\phi^T \mathbf{M} \phi$ se obtiene la matriz de masas generalizada $\mathbf{M}_g$ (matriz identidad), mostrada en la ecuación 6.15.

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{M}_g = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Por otra parte, la matriz de rigideces generalizada $\mathbf{K}_g$ se muestra en la expresión 6.16.

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Luego de haber obtenido las matrices de masas y rigideces generalizadas ($\mathbf{M}_g$ y $\mathbf{K}_g$), se puede proceder con más acierto a plantear el sistema en coordenadas modales. Para ello, la base es la ecuación 6.3a, la cual se vuelve a mostrar aquí:

$$\mathbf{M} \ddot{u} + \mathbf{K} u = 0$$

Siendo posible representar el vector de desplazamientos $u(t)$ y su doble derivada en términos de las coordenadas modales $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, como se muestra en las expresiones 6.17a y 6.17b;

$$u = \phi \varphi \quad (6.17a)$$

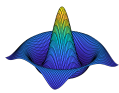
$$\ddot{u} = \phi \ddot{\varphi} \quad (6.17b)$$

se pasa a reemplazar las expresiones 6.17a y 6.17b en la ecuación 6.3a y se utiliza el argumento de multiplicar a todos los términos por ϕ^T , con la finalidad de obtener expresiones equivalentes a las matrices de masas y rigideces generalizadas; como se muestra en las ecuaciones 6.18a y 6.18b.

$$\phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{\varphi} + \phi^T \mathbf{K} \phi \varphi = \phi^T 0 = 0 \quad (6.18a)$$

$$\mathbf{I} \ddot{\varphi} + \mathbf{K}_g \varphi = 0 \quad (6.18b)$$

Finalmente, representando la ecuación 6.18b en forma matricial resulta la ecuación 6.19; la cual, al ser desacoplada, genera las ecuaciones (6.20a y 6.20b) en coordenadas modales que representan el sistema en vibración libre.



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$\ddot{\varphi}_1(t) + 923.5633\varphi_1(t) = 0 \quad (6.20a)$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) + 10695.8882\varphi_2(t) = 0 \quad (6.20b)$$

Condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad escritas en coordenadas físicas (expresión 6.21)

$$u(0) = u_0 \quad y \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (6.21)$$

pueden ser representadas en coordenadas modales de distintas formas, como se presenta en las expresiones 6.22a, 6.22b, 6.22c y 6.22d.

$$u_0 = u(0) = \phi\varphi(0) \quad y \quad v_0 = \dot{u}(0) = \phi\dot{\varphi}(0) \quad (6.22a)$$

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \phi^{-1}u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) = \phi^{-1}v_0 \quad (6.22b)$$

$$\varphi_0 = \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.22c)$$

$$\varphi_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.22d)$$

6.2.2. Ejemplo: Análisis modal de un sistema en vibración libre (2 pisos)

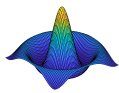
Se resuelve el análisis modal completo del ejemplo anterior en código fuente.

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema8**;

```
1 function dydt=sistema8(y,wn)
2 dydt=zeros(2,1);
3 dydt(1)=y(2);
4 dydt(2)=(-wn^2)*y(1);
```

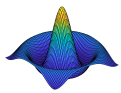
posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal para sistemas de múltiples grados de libertad en
2 % vibración libre por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco
3 % Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería
4 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Ingreso de datos
8 Masa=[21.63 0; 0 19.23]; % Matriz de masa de la estructura
9 KK=[140323.1055 -98688.7775; -98688.7775 98688.7775]; % Matriz de ↵
   rigidez de la estructura
10 t=0:0.01:2; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo
11 cond=[0.10 0; 0.10 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento | ↵
   velocidad)
12 % Análisis Modal
13 % Vectores propios, valores propios y frecuencias naturales
14 [Evector, Evalor]=eig(KK, Masa);
```



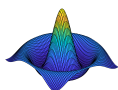
6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

```
15 wn=sort(sqrt(diag(Evalor)));
16 % Normalización de vectores propios
17 [row,col]=size(Masa);
18 for i=1:col
19     [a,b]=max(abs(Evector(:,i)));
20     Evector(:,i)=Evector(:,i)/Evector(b,i);
21 end
22 % Masas y rigideces generalizadas
23 for i=1:col
24     M(i)=Evector(:,i)'*Masa*Evector(:,i);
25 end
26 for i=1:col
27     K(i)=Evector(:,i)'*KK*Evector(:,i);
28 end
29 % Renormalización respecto a la masa
30 for i=1:col
31     c(i)=sqrt(1/M(i));
32 end
33 for i=1:col
34     Evector(:,i)=c(i)*Evector(:,i);
35 end
36 % Condiciones iniciales modales
37 condn=[Evector'*Masa*cond(:,1) Evector'*Masa*cond(:,2)];
38 % Solución en coordenadas normales
39 for i=1:col
40     [t,y(:, :, i)]=ode45(@(t,y) sistema8(y,wn(i)), t, condn(i,:));
41 end
42 % Cálculo para desplazamiento
43 yy=y(:,1,1);
44 for i=2:col
45     yy=[yy y(:,1,i)];
46 end
47 u=Evector*yy';
48 % Cálculo para velocidad
49 vv=y(:,2,1);
50 for i=2:col
51     vv=[vv y(:,2,i)];
52 end
53 v=Evector*vv';
54 % Visualización numérica de los resultados.
55 f=figure('Name','Visualización numérica del Análisis Modal','NumberTitle←
    ','off','Position',[500 500 875 305]);
56 set(gcf,'Color','w');
57 cnames={'Tiempo','Desplazamiento 1'};
58 uitable('Parent',f,'Data',[t u(1,:)'],'ColumnName',cnames,'RowName',[],'←
    Position',[40 25 193.5 255]);
59 cnames={'Tiempo','Desplazamiento 2'};
60 uitable('Parent',f,'Data',[t u(2,:)'],'ColumnName',cnames,'RowName',[],'←
    Position',[255 25 193.5 255]);
61 cnames={'Tiempo','Velocidad 1'};
62 uitable('Parent',f,'Data',[t v(1,:)'],'ColumnName',cnames,'RowName',[],'←
    Position',[472.5 25 172.5 255]);
63 cnames={'Tiempo','Velocidad 2'};
64 uitable('Parent',f,'Data',[t v(2,:)'],'ColumnName',cnames,'RowName',[],'←
    Position',[665 25 172.5 255]);
65 % Diagramas modales
66 EV(2:3,1:2)=Evector;
```



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

```
67 figure('Name','Modos de vibración','NumberTitle','off','Position',[550 ←  
    175 650 700])  
68 set(gca,'Color','w'); set(gcf,'Color','w');  
69 for i=1:2  
70     x=EV(:,i);  
71     y=0:2;  
72     yy=0:0.01:max(y);  
73     xx=interp1(y,x,yy,'pchip');  
74     plot(xx,yy,'Color',rand(3,1),'LineWidth',2)  
75     xlabel('\Phi (Vectores propios)','FontSize',20,'FontName','Century')  
76     ylabel('# de Piso','FontSize',20,'FontName','Century')  
77     title('Diagramas Modales','FontName','Century','FontSize',20)  
78     hleg=legend('Modo 1','Modo 2','Location','NorthEastOutside');  
79     set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',16)  
80     hold on, grid on  
81     set(gca,'GridAlpha',0.40);  
82 end  
83 % Visualización gráfica de los resultados.  
84 figure('Name','Visualización numérica de los resultados','NumberTitle','←  
    off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])  
85 subplot(2,2,1)  
86 set(gcf,'Color','w')  
87 plot(t,u(1,:), 'b', 'LineWidth',2), grid on  
88 set(gca,'GridAlpha',0.40);  
89 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←  
    normal')  
90 ylabel('Desplazamiento 1 (m)','FontName','Century','FontSize',20,'←  
    FontWeight','normal')  
91 subplot(2,2,2)  
92 plot(t,u(2,:), 'b', 'LineWidth',2), grid on  
93 set(gca,'GridAlpha',0.40);  
94 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←  
    normal')  
95 ylabel('Desplazamiento 2 (m)','FontName','Century','FontSize',20,'←  
    FontWeight','normal')  
96 subplot(2,2,3)  
97 plot(t,v(1,:), 'r', 'LineWidth',2), grid on  
98 set(gca,'GridAlpha',0.40);  
99 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←  
    normal')  
100 ylabel('Velocidad 1 (m/s)','FontName','Century','FontSize',20,'←  
    FontWeight','normal')  
101 subplot(2,2,4)  
102 plot(t,v(2,:), 'r', 'LineWidth',2), grid on  
103 set(gca,'GridAlpha',0.40);  
104 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←  
    normal')  
105 ylabel('Velocidad 2 (m/s)','FontName','Century','FontSize',20,'←  
    FontWeight','normal')  
106 % Visualización interactiva  
107 figure('Name','Visualización interactiva de desplazamientos','←  
    NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])  
108 set(gcf,'Color','w')  
109 set(gca,'Color','w','Visible','off')  
110 axis tight  
111 x1=10*u(1,:);  
112 x2=10*u(2,:);
```



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

```
113 for k=1:length(x1)
114     y1=3*ones(1,length(x1));
115     y2=6*ones(1,length(x2));
116     plot3([x1(k) 5+x1(k)], [0 0], [y1(k) y1(k)], 'Color','r','LineWidth',25)
117     hold on
118     plot3([x2(k) 5+x2(k)], [0 0], [y2(k) y2(k)], 'Color','r','LineWidth',25)
119     set(gca, 'Color','w', 'Visible','off')
120     plot3([0 x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], [5 5+x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], 'Color','b←
121         ', 'LineWidth',15)
122     plot3([x1(k) x2(k)], [0 0], [y1(k) y2(k)], [5+x1(k) 5+x2(k)], [0 0], [y1(k)←
123         y2(k)], 'Color','b', 'LineWidth',15)
124     fill3([-0.60 -0.60 0.60 0.60], [-0.60 0.60 0.60 -0.60], [0 0 0 0], 'g')
125     fill3([4.40 4.40 5.60 5.60], [-0.60 0.60 0.60 -0.60], [0 0 0 0], 'g')
126     axis equal
127     axis([-1.5 6.5 -1 1 0 6.05])
128     drawnow
129     pause(0.0125)
130     hold off
131 end
```

Resultados:

La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.2). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.3). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.4). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.5).

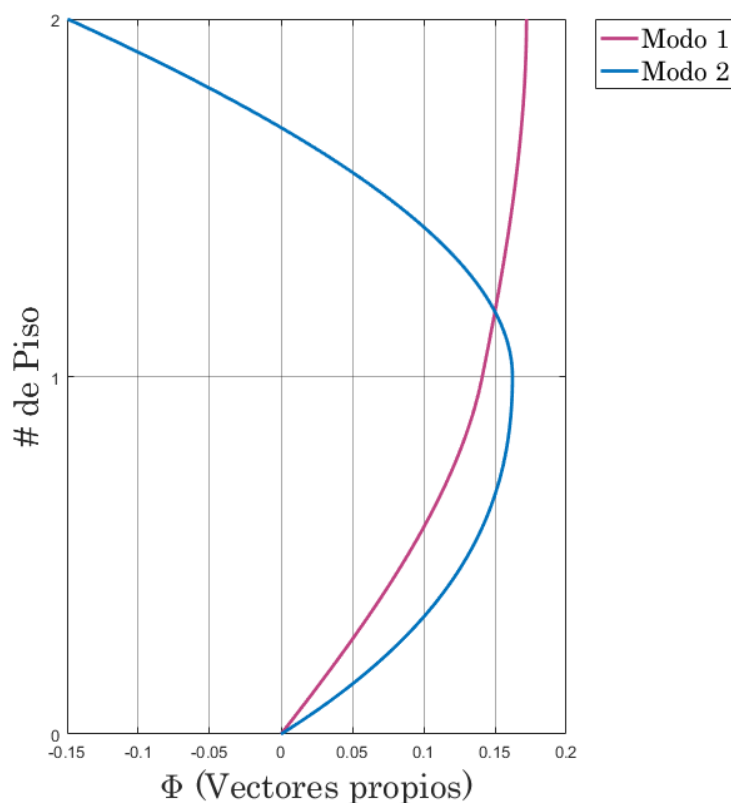
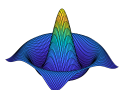


Figura 6.2: Diagramas modales.



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2
0	0.1000	0	0.1000	0	0	0	0
1.0000e-03	0.0999	1.0000e-03	0.1000	1.0000e-03	-0.1923	1.0000e-03	-1.6454e-04
0.0020	0.0996	0.0020	0.1000	0.0020	-0.3833	0.0020	-0.0013
0.0030	0.0991	0.0030	0.1000	0.0030	-0.5719	0.0030	-0.0044
0.0040	0.0985	0.0040	0.1000	0.0040	-0.7567	0.0040	-0.0104
0.0050	0.0976	0.0050	0.1000	0.0050	-0.9367	0.0050	-0.0203
0.0060	0.0966	0.0060	0.0999	0.0060	-1.1108	0.0060	-0.0348
0.0070	0.0954	0.0070	0.0999	0.0070	-1.2778	0.0070	-0.0548
0.0080	0.0940	0.0080	0.0998	0.0080	-1.4368	0.0080	-0.0811
0.0090	0.0925	0.0090	0.0997	0.0090	-1.5869	0.0090	-0.1144
0.0100	0.0909	0.0100	0.0996	0.0100	-1.7271	0.0100	-0.1552
0.0110	0.0891	0.0110	0.0994	0.0110	-1.8569	0.0110	-0.2042
0.0120	0.0872	0.0120	0.0992	0.0120	-1.9755	0.0120	-0.2616

Figura 6.3: Historiales de desplazamientos y velocidades en forma tabular.

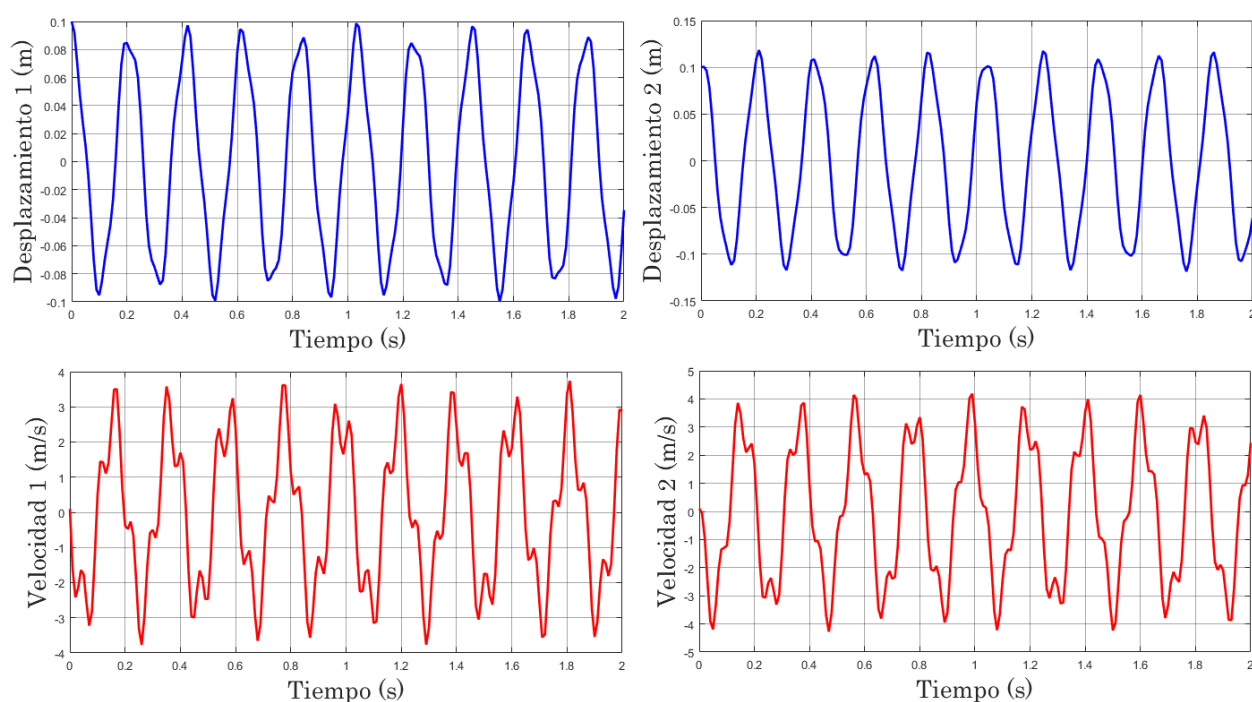


Figura 6.4: Historiales de desplazamientos y velocidades.

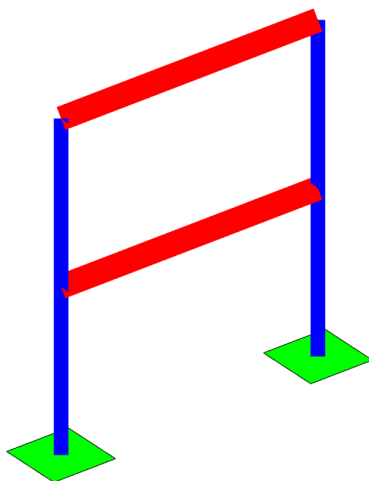
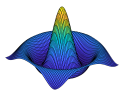


Figura 6.5: Modelo del pórtico de 2 pisos.



6.2.3. Ejemplo: Análisis modal de un sistema en vibración libre (5 pisos)

Se resuelve el análisis modal completo del sistema de la figura 6.6, siendo las matrices de masas y de rigidez las expresiones 6.23a y 6.23b, respectivamente.

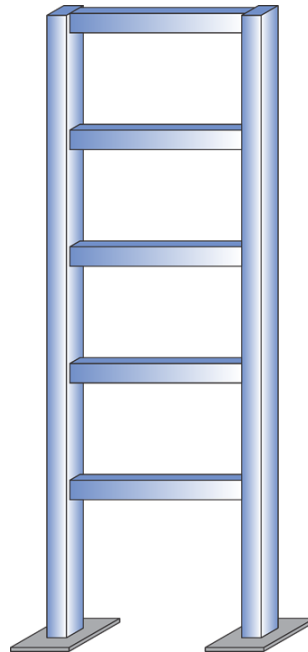


Figura 6.6: Pórtico de 5 pisos.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.23 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (6.23a)$$

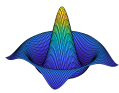
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 108130.00 & -84922.00 & 27513.00 & -5501.70 & 838.58 \\ -84922.00 & 134650.00 & -91901.00 & 28244.00 & -4305.00 \\ 27513.00 & -91901.00 & 135800.00 & -88718.00 & 21044.00 \\ -5501.70 & 28244.00 & -88718.00 & 118480.00 & -53252.00 \\ 838.58 & -4305.00 & 21044.00 & -53252.00 & 35789.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.23b)$$

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema8**;

```
1 function dydt=sistema8(y,wn)
2 dydt=zeros(2,1);
3 dydt(1)=y(2);
4 dydt(2)=(-wn^2)*y(1);
```

posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado parcialmente en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal para sistemas de múltiples grados de libertad en
```



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

```
2 % vibración libre por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco
3 % Guzmán López. Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería
4 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Ingreso de datos
8 Masa=diag([21.63 19.23 19.23 19.23 19.23]); % Matriz de masa de la estructura
9 KK=[108128.2746 -84921.5701 27513.3226 -5501.7202 838.5785; -84921.5701 134651.7709
    -91901.0728 28244.2442 -4305.0202; 27513.3226 -91901.0728 135797.7999
    -88717.6589 21043.5763; -5501.7202 28244.2442 -88717.6589 118480.0280
    -53251.9584; 838.5785 -4305.0202 21043.5763 -53251.9584 35788.6924]; % Matriz de rigidez de la estructura
10 t=0:0.01:2; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo
11 cond=[0.10 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento | velocidad)
12 % Análisis Modal
13 % Vectores propios, valores propios y frecuencias naturales
14 [Evector, Evalor]=eig(KK, Masa); wn=sort(sqrt(diag(Evalor)));
15 % Normalización de vectores propios
16 [row, col]=size(Masa);
17 for i=1:col
18     [a, b]=max(abs(Evector(:, i))); Evector(:, i)=Evector(:, i)/Evector(b, i);
19 end % Continúa ...
```

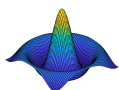
Resultados:

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.7). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.8). La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.9). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.10).

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Desplazamiento 3	Tiempo	Desplazamiento 4	Tiempo	Desplazamiento 5
0	0.1000	0	-2.8980e-17	0	6.0004e-18	0	4.9947e-18	0	-1.7705e-17
1.0000e-03	0.0998	1.0000e-03	2.2055e-04	1.0000e-03	-7.1372e-05	1.0000e-03	1.4237e-05	1.0000e-03	-2.1652e-06
0.0020	0.0990	0.0020	8.7920e-04	0.0020	-2.8350e-04	0.0020	5.6123e-05	0.0020	-8.4768e-06
0.0030	0.0978	0.0030	0.0020	0.0030	-6.3037e-04	0.0030	1.2323e-04	0.0030	-1.8415e-05
0.0040	0.0960	0.0040	0.0035	0.0040	-0.0011	0.0040	2.1170e-04	0.0040	-3.1141e-05
0.0050	0.0939	0.0050	0.0054	0.0050	-0.0017	0.0050	3.1609e-04	0.0050	-4.5439e-05
0.0060	0.0912	0.0060	0.0076	0.0060	-0.0024	0.0060	4.2946e-04	0.0060	-5.9735e-05
0.0070	0.0882	0.0070	0.0102	0.0070	-0.0031	0.0070	5.4352e-04	0.0070	-7.2196e-05
0.0080	0.0847	0.0080	0.0131	0.0080	-0.0039	0.0080	6.4978e-04	0.0080	-8.1116e-05
0.0090	0.0809	0.0090	0.0163	0.0090	-0.0048	0.0090	7.3867e-04	0.0090	-8.4603e-05
0.0100	0.0768	0.0100	0.0197	0.0100	-0.0056	0.0100	7.9968e-04	0.0100	-8.0449e-05
0.0110	0.0723	0.0110	0.0232	0.0110	-0.0064	0.0110	8.2298e-04	0.0110	-6.6878e-05
0.0120	0.0676	0.0120	0.0269	0.0120	-0.0072	0.0120	7.9868e-04	0.0120	-4.2168e-05

Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2	Tiempo	Velocidad 3	Tiempo	Velocidad 4	Tiempo	Velocidad 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.0000e-03	-0.4992	1.0000e-03	0.4406	1.0000e-03	-0.1424	1.0000e-03	0.0283	1.0000e-03	-0.0043
0.0020	-0.9939	0.0020	0.8752	0.0020	-0.2809	0.0020	0.0550	0.0020	-0.0082
0.0030	-1.4800	0.0030	1.2980	0.0030	-0.4116	0.0030	0.0786	0.0030	-0.0115
0.0040	-1.9530	0.0040	1.7030	0.0040	-0.5306	0.0040	0.0973	0.0040	-0.0136
0.0050	-2.4088	0.0050	2.0848	0.0050	-0.6345	0.0050	0.1098	0.0050	-0.0145
0.0060	-2.8436	0.0060	2.4381	0.0060	-0.7200	0.0060	0.1151	0.0060	-0.0137
0.0070	-3.2537	0.0070	2.7583	0.0070	-0.7842	0.0070	0.1119	0.0070	-0.0112
0.0080	-3.6358	0.0080	3.0410	0.0080	-0.8247	0.0080	0.0996	0.0080	-0.0068
0.0090	-3.9867	0.0090	3.2824	0.0090	-0.8392	0.0090	0.0773	0.0090	-3.6830e-04
0.0100	-4.3038	0.0100	3.4791	0.0100	-0.8259	0.0100	0.0445	0.0100	0.0082
0.0110	-4.5846	0.0110	3.6284	0.0110	-0.7837	0.0110	0.0011	0.0110	0.0189
0.0120	-4.8273	0.0120	3.7282	0.0120	-0.7120	0.0120	-0.0525	0.0120	0.0314

Figura 6.7: Historiales de desplazamientos y velocidades.



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

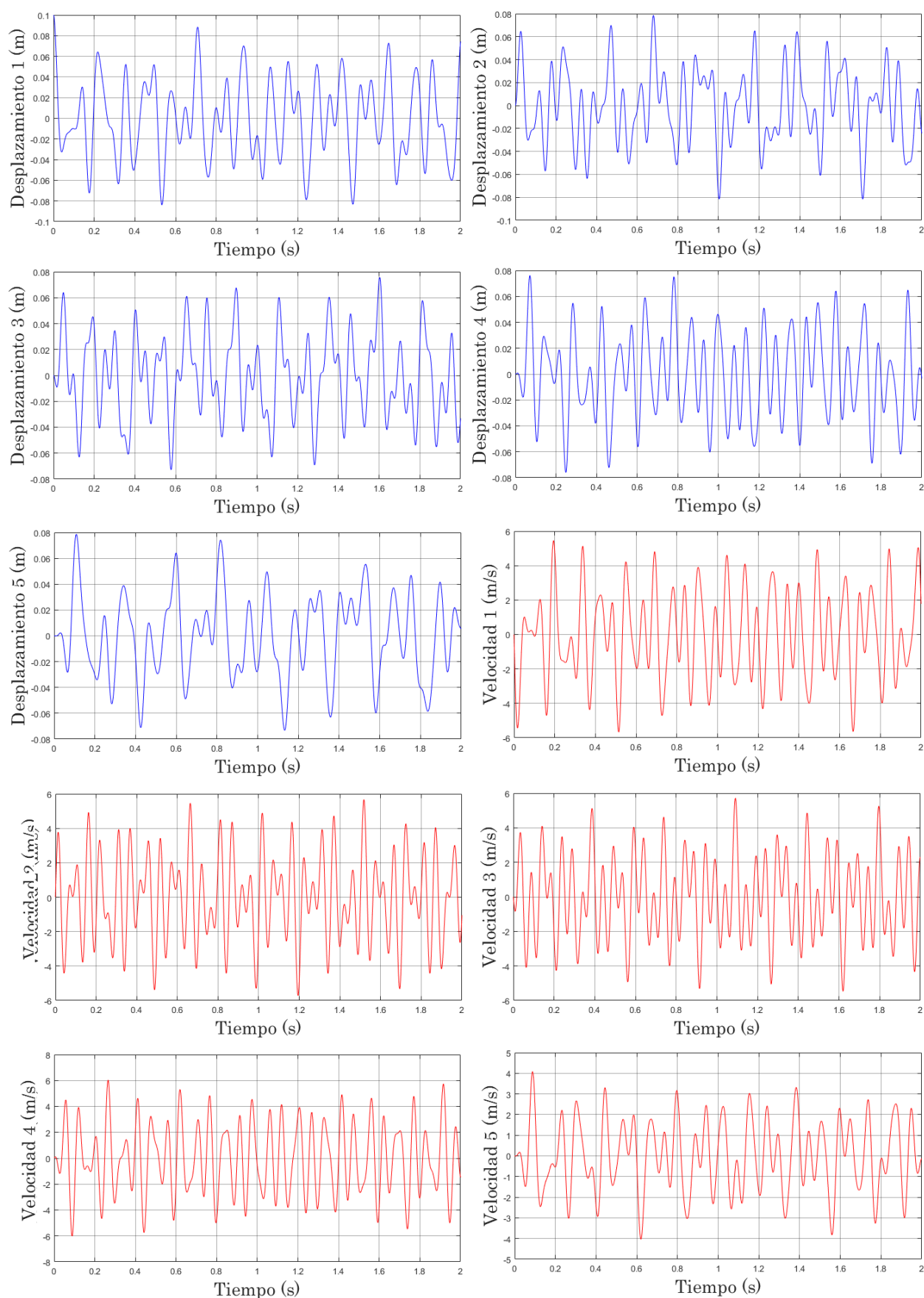
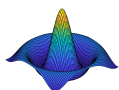


Figura 6.8: Historiales de desplazamientos y velocidades.



6.2. Análisis modal de sistemas en vibración libre

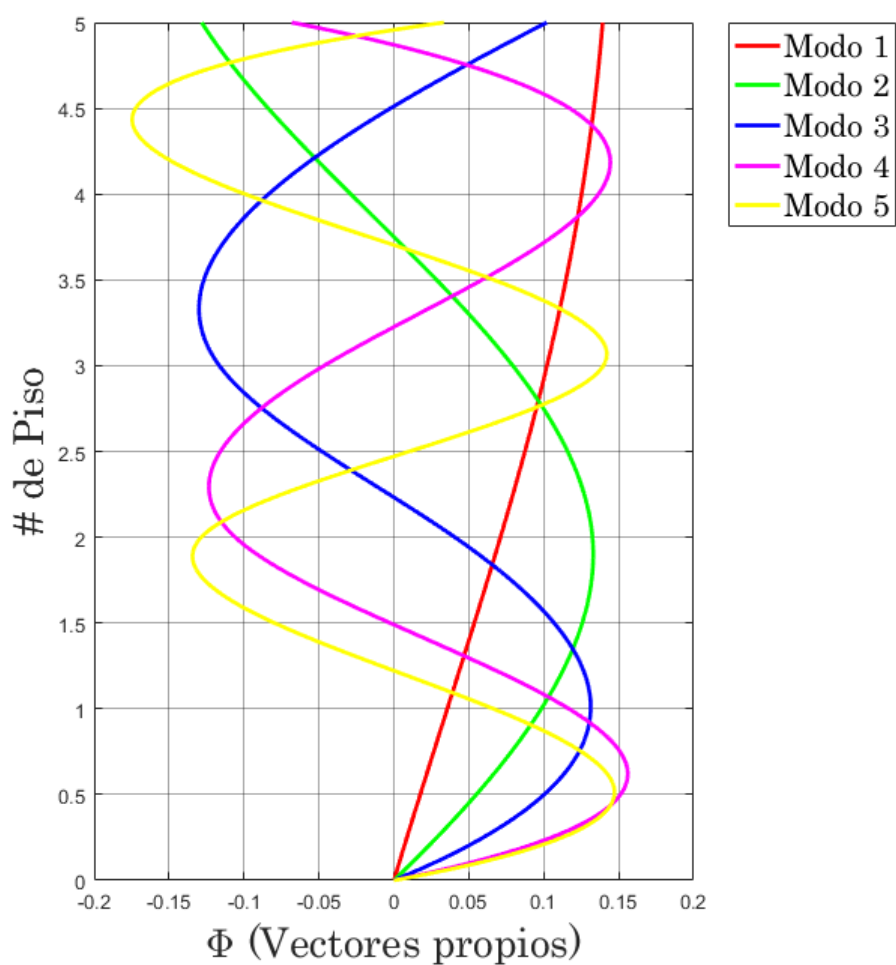


Figura 6.9: Diagramas modales.

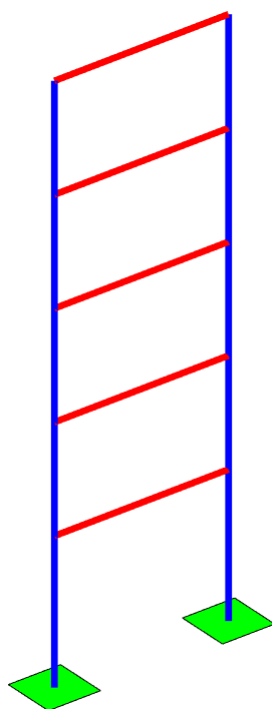
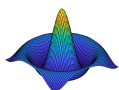


Figura 6.10: Modelo del pórtico de 5 pisos.



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

La base del planteamiento del problema es la ecuación diferencial de equilibrio de un sistema no amortiguado en vibración forzada; dicha ecuación es la siguiente (ecuación 6.24):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (6.24)$$

A continuación, se presenta la deducción de las ecuaciones modales de un sistema no amortiguado en vibración forzada y la solución mediante código fuente de MATLAB® del mismo sistema. Habiendo también un ejemplo con más pisos, con la finalidad de ilustrar el procedimiento que conlleva a su resolución.

6.3.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema no amortiguado en vibración forzada (2 pisos)

Realizar el análisis modal del sistema estructural correspondiente al mostrado en la figura 6.11, asumiendo un modelo simplificado de viga en voladizo; al cual le corresponden los siguientes datos: $f_1(t) = 100\cos(5t)$, $f_2(t) = 100\cos(5t)$, $m_1 = 21.63 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $m_2 = 19.23 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $k_{11} = 140323.1055 \text{ kN/m}$, $k_{12} = -98688.7775 \text{ kN/m}$, $k_{21} = -98688.7775 \text{ kN/m}$ y $k_{22} = 98688.7775 \text{ kN/m}$.

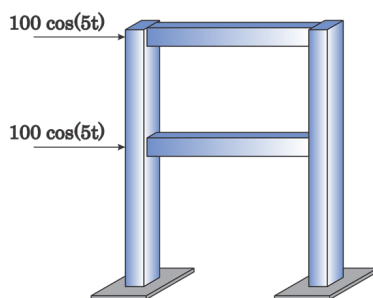


Figura 6.11: Pórtico bidimensional de 2 niveles con fuerzas laterales en sus entrepisos.

Solución: El procedimiento del desarrollo detallado para obtener las ecuaciones modales es el siguiente:

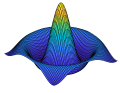
Se construyen las matrices de masa y rigidez, y el vector de fuerzas del sistema; mostrados en las expresiones 6.25a, 6.25b y 6.25c, respectivamente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \quad (6.25a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \quad (6.25b)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \end{bmatrix} \quad (6.25c)$$

Siendo la ecuación compacta y la ecuación matricial de equilibrio del sistema en vibración libre, las mostradas en la ecuación 6.26a y 6.26b, respectivamente.



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (6.26a)$$

$$\begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.26b)$$

Luego, con las matrices masa $\mathbf{M}$ y rigidez $\mathbf{K}$ se plantea el problema de valores característicos, mostrado en la ecuación 6.27;

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} [\phi] = \omega^2 \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} [\phi] \quad (6.27)$$

o de forma conveniente reescribir la ecuación 6.27 a la ecuación 6.28, donde se despeja la ecuación para obtener todas las variables en un solo lado de la ecuación.

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 - 21.63\omega^2 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23\omega^2 \end{bmatrix} [\phi] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Mediante un procedimiento igual al realizado en el establecimiento de *ecuaciones en coordenadas modales de un sistema en vibración libre (2 pisos)*, se obtiene la siguiente matriz de vectores propios.

$$\phi = [\phi_1 \quad \phi_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1411 & 0.1622 \\ 0.1721 & -0.1496 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

la cual se comprueba es correcta, ya que al realizar la operación $\phi^T \mathbf{M} \phi$ se obtiene la matriz de masas generalizada $\mathbf{M}_g$ (matriz identidad), mostrada en la ecuación 6.30.

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{M}_g = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

Por otra parte, la matriz de rigideces generalizada $\mathbf{K}_g$ se muestra en la expresión 6.31.

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Luego de haber obtenido las matrices de masas y rigideces generalizadas ($\mathbf{M}_g$ y $\mathbf{K}_g$), se puede proceder con más acierto a plantear el sistema en coordenadas modales. Para ello, la base es la ecuación 6.26a, la cual se vuelve a mostrar aquí:

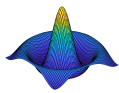
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$$

Siendo posible representar el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ y su doble derivada en términos de las coordenadas modales $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, como se muestra en las expresiones 6.32a y 6.32b;

$$\mathbf{u} = \phi \varphi \quad (6.32a)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \phi \ddot{\varphi} \quad (6.32b)$$

se pasa a reemplazar las expresiones 6.32a y 6.32b en la ecuación 6.26a y se utiliza el argumento de multiplicar a todos los términos por ϕ^T ; como se muestra en las ecuaciones 6.33a y 6.33b.



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

$$\phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{\varphi} + \phi^T \mathbf{K} \phi \varphi = \phi^T \mathbf{f}(t) \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{I} \ddot{\varphi} + \mathbf{K}_g \varphi = \phi^T \mathbf{f}(t) \quad (6.33b)$$

Finalmente, representando la ecuación 6.33b en forma matricial resulta la ecuación 6.34; la cual, al ser desacoplada, genera las ecuaciones (6.35a y 6.35b) en coordenadas modales que representan el sistema en vibración forzada no amortiguada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \phi^T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\ddot{\varphi}_1(t) + 923.5633 \varphi_1(t) = \phi_{11} f_1(t) + \phi_{21} f_2(t) \quad (6.35a)$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) + 10695.8882 \varphi_2(t) = \phi_{12} f_1(t) + \phi_{22} f_2(t) \quad (6.35b)$$

Condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad escritas en coordenadas físicas (expresión 6.36)

$$u(0) = u_0 \quad y \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (6.36)$$

pueden ser representadas en coordenadas modales de distintas formas, como se presenta en las expresiones 6.37a, 6.37b, 6.37c y 6.37d.

$$u_0 = u(0) = \phi \varphi(0) \quad y \quad v_0 = \dot{u}(0) = \phi \dot{\varphi}(0) \quad (6.37a)$$

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \phi^{-1} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) = \phi^{-1} v_0 \quad (6.37b)$$

$$\varphi_0 = \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.37c)$$

$$\varphi_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.37d)$$

6.3.2. Ejemplo: Análisis modal de un sistema no amortiguado en vibración forzada (2 pisos)

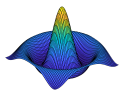
Se resuelve el análisis modal completo del ejemplo anterior en código fuente.

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema9**;

```
1 function dydt=sistema9(t,y,wn,Ft,F)
2 dydt=zeros(2,1);
3 F=interp1(Ft,F,t);
4 dydt(1)=y(2);
5 dydt(2)=(-wn^2)*y(1)+F;
```

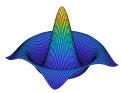
posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal para sistemas de múltiples grados de libertad en
2 % vibración libre por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco
3 % Guzmán López. Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería
4 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
```



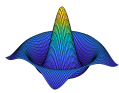
6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

```
6  clc, clear all, close all
7  % Ingreso de datos
8  Masa=[21.63 0; 0 19.23]; % Matriz de masa de la estructura
9  KK=[140323.1055 -98688.7775; -98688.7775 98688.7775]; % Matriz de rigidez de la estructura
10 t=0:0.01:5; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo
11 cond=[0 0; 0 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento | velocidad)
12 % Análisis Modal
13 % Vectores propios, valores propios y frecuencias naturales
14 [Evector, Evalor]=eig(KK,Masa);
15 wn=sort(sqrt(diag(Evalor)));
16 % Normalización de vectores propios
17 [row,col]=size(Masa);
18 for i=1:col
19     [a,b]=max(abs(Evector(:,i)));
20     Evector(:,i)=Evector(:,i)/Evector(b,i);
21 end
22 % Masas y rigideces generalizadas
23 for i=1:col
24     M(i)=Evector(:,i)'*Masa*Evector(:,i);
25 end
26 for i=1:col
27     K(i)=Evector(:,i)'*KK*Evector(:,i);
28 end
29 % Renormalización respecto a la masa
30 for i=1:col
31     c(i)=sqrt(1/M(i));
32 end
33 for i=1:col
34     Evector(:,i)=c(i)*Evector(:,i);
35 end
36 % Condiciones iniciales modales
37 condn=[Evector'*Masa*cond(:,1) Evector'*Masa*cond(:,2)];
38 % Determinación de fuerzas
39 Ft=linspace(0,t(1,end),100);
40 F=zeros(col,length(Ft));
41 F(1,:)=100*cos(5*Ft);
42 F(2,:)=100*cos(5*Ft);
43 F=Evector'*F;
44 % Solución en coordenadas normales
45 for i=1:col
46     [t,y(:, :, i)]=ode45(@(t,y) sistema9(t,y,wn(i),Ft,F(i,:)), t, condn(i,:));
47 end
48 % Cálculo para desplazamiento
49 yy=y(:,1,1);
50 for i=2:col
51     yy=[yy y(:,1,i)];
52 end
53 u=Evector*yy';
54 % Cálculo para velocidad
55 vv=y(:,2,1);
56 for i=2:col
57     vv=[vv y(:,2,i)];
58 end
59 v=Evector*vv';
60 % Visualización numérica de los resultados.
61 f=figure('Name','Visualización numérica del Análisis Modal','NumberTitle←
```



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

```
' , 'off', 'Position', [500 500 875 305]);
62 set(gcf, 'Color', 'w')
63 cnames={ 'Tiempo', 'Desplazamiento 1'};
64 uitable('Parent',f, 'Data', [t u(1,:)'], 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '←
    Position', [40 25 193.5 255]);
65 cnames={ 'Tiempo', 'Desplazamiento 2'};
66 uitable('Parent',f, 'Data', [t u(2,:)'], 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '←
    Position', [255 25 193.5 255]);
67 cnames={ 'Tiempo', 'Velocidad 1'};
68 uitable('Parent',f, 'Data', [t v(1,:)'], 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '←
    Position', [472.5 25 172.5 255]);
69 cnames={ 'Tiempo', 'Velocidad 2'};
70 uitable('Parent',f, 'Data', [t v(2,:)'], 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '←
    Position', [665 25 172.5 255]);
71 % Diagramas modales
72 EV(2:3,1:2)=Evector;
73 figure('Name', 'Modos de vibración', 'NumberTitle', 'off', 'Position', [550 ←
    175 650 700])
74 set(gca, 'Color', 'w')
75 set(gcf, 'Color', 'w')
76 for i=1:2
77     x=EV(:,i);
78     y=0:2;
79     yy=0:0.01:max(y);
80     xx=interp1(y,x,yy, 'spline');
81     plot(xx,yy, 'Color', rand(3,1), 'LineWidth', 2)
82     xlabel('\Phi (Vectores propios)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
83     ylabel('# de Piso', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
84     title('Diagramas Modales', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20)
85     hleg=legend('Modo 1', 'Modo 2', 'Modo 3', 'Modo 4', 'Modo 4', 'Location', '←
        NorthEastOutside');
86     set(hleg, 'FontAngle', 'normal', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 16)
87     hold on
88     grid on
89     set(gca, 'GridAlpha'.0.40);
90 end
91 % Visualización gráfica de los resultados - Desplazamientos.
92 figure('Name', 'Visualización numérica de los resultados - ←
    Desplazamientos', 'NumberTitle', 'off', 'units', 'normalized', '←
    outerposition', [0 0 1 1])
93 subplot(2,2,1)
94 set(gcf, 'Color', 'w')
95 plot(t,u(1,:), 'b', 'LineWidth', 2)
96 grid on
97 ax=gca;
98 ax.GridAlpha=0.40;
99 xlabel('Tiempo (s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, 'FontWeight', '←
    normal')
100 ylabel('Desplazamiento 1 (m)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, '←
    FontWeight', 'normal')
101 subplot(2,2,2)
102 plot(t,u(2,:), 'b', 'LineWidth', 2)
103 grid on
104 set(gca, 'GridAlpha'.0.40);
105 xlabel('Tiempo (s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, 'FontWeight', '←
    normal')
106 ylabel('Desplazamiento 2 (m)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, '←
```

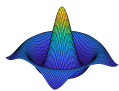


6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

```
    FontWeight','normal')
107 % Visualización gráfica de los resultados - Velocidades.
108 figure('Name','Visualización numérica de los resultados - Velocidades','↵
    NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])
109 subplot(2,2,1)
110 set(gcf,'Color','w')
111 plot(t,v(1:,:), 'r','LineWidth',2)
112 grid on
113 set(gca,'GridAlpha'.0.40);
114 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','↵
    normal')
115 ylabel('Velocidad 1 (m/s)','FontName','Century','FontSize',20,'↵
    FontWeight','normal')
116 subplot(2,2,2)
117 plot(t,v(2:,:), 'r','LineWidth',2)
118 grid on
119 set(gca,'GridAlpha'.0.40);
120 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','↵
    normal')
121 ylabel('Velocidad 2 (m/s)','FontName','Century','FontSize',20,'↵
    FontWeight','normal')
122 % Visualización interactiva
123 figure('Name','Visualización interactiva de desplazamientos','↵
    NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1])
124 set(gcf,'Color','w')
125 set(gca,'Color','w','Visible','off')
126 axis tight
127 x1=20*u(1,:);
128 x2=20*u(2,:);
129 for k=1:length(x1)
130     y1=4*ones(1,length(x1));
131     y2=7*ones(1,length(x2));
132     plot3([x1(k) 5+x1(k)],[0 0],[y1(k) y1(k)], 'Color','r','LineWidth',7.5)
133     hold on
134     plot3([x2(k) 5+x2(k)],[0 0],[y2(k) y2(k)], 'Color','r','LineWidth',7.5)
135     set(gca,'Color','w','Visible','off')
136     plot3([0 x1(k)],[0 0],[0 y1(k)],[5 5+x1(k)],[0 0],[0 y1(k)], 'Color','b↵
        'LineWidth',7.5)
137     plot3([x1(k) x2(k)],[0 0],[y1(k) y2(k)],[5+x1(k) 5+x2(k)],[0 0],[y1(k)↵
        y2(k)], 'Color','b','LineWidth',7.5)
138     fill3([-0.50 -0.50 0.50 0.50],[-0.50 0.50 0.50 -0.50],[0 0 0 0], 'g')
139     fill3([4.50 4.50 5.50 5.50],[-0.50 0.50 0.50 -0.50],[0 0 0 0], 'g')
140     axis equal
141     axis([-1.5 6.5 -1 1 0 7.05])
142     drawnow
143     pause(0.0125)
144     hold off
145 end
```

Resultados:

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.12). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.13). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.14). La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.15).



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2
0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	2.2807e-04	0.0100	2.5817e-04	0.0100	0.0451	0.0100	0.0513
0.0200	8.8136e-04	0.0200	0.0010	0.0200	0.0842	0.0200	0.0990
0.0300	0.0019	0.0300	0.0022	0.0300	0.1139	0.0300	0.1387
0.0400	0.0031	0.0400	0.0037	0.0400	0.1327	0.0400	0.1654
0.0500	0.0045	0.0500	0.0055	0.0500	0.1406	0.0500	0.1752
0.0600	0.0059	0.0600	0.0072	0.0600	0.1366	0.0600	0.1670
0.0700	0.0072	0.0700	0.0087	0.0700	0.1194	0.0700	0.1423
0.0800	0.0082	0.0800	0.0100	0.0800	0.0890	0.0800	0.1049
0.0900	0.0089	0.0900	0.0108	0.0900	0.0481	0.0900	0.0583
0.1000	0.0092	0.1000	0.0111	0.1000	0.0019	0.1000	0.0057
0.1100	0.0090	0.1100	0.0109	0.1100	-0.0442	0.1100	-0.0500
0.1200	0.0083	0.1200	0.0101	0.1200	-0.0860	0.1200	-0.1042

Figura 6.12: Historiales de respuestas en forma tabular.

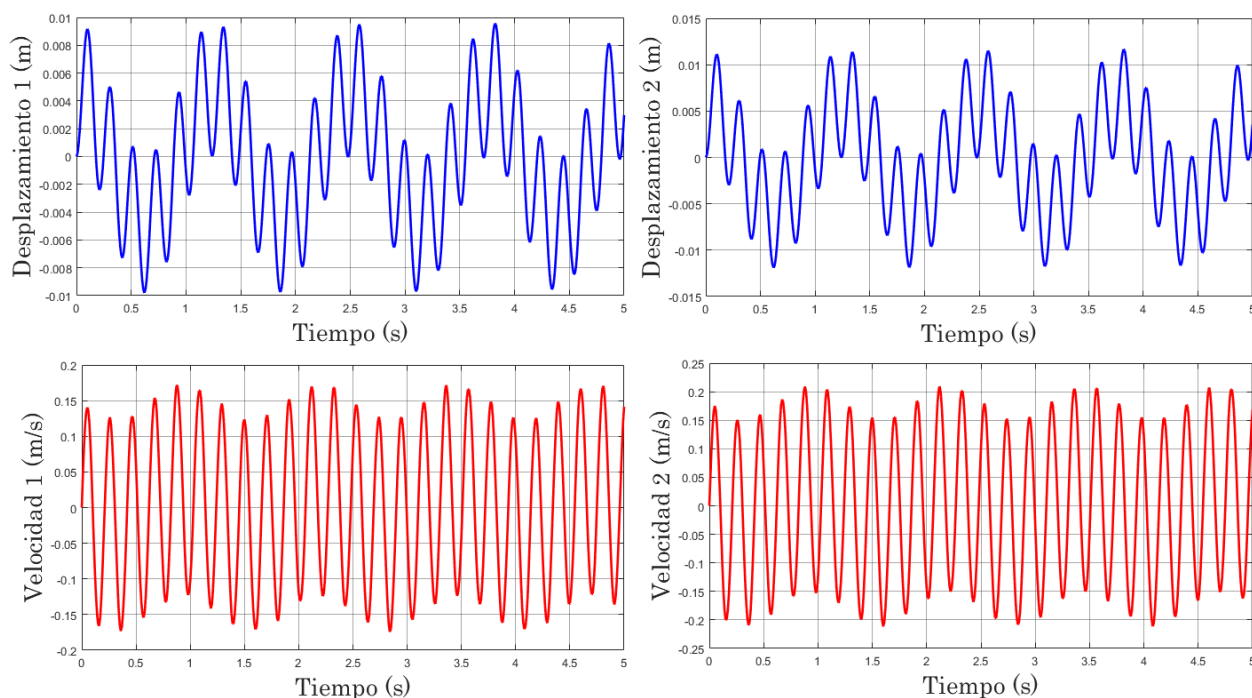


Figura 6.13: Historiales de desplazamientos y velocidades.

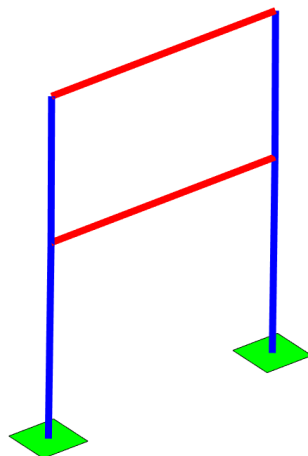
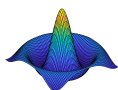


Figura 6.14: Modelo del pórtico de 2 pisos.



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

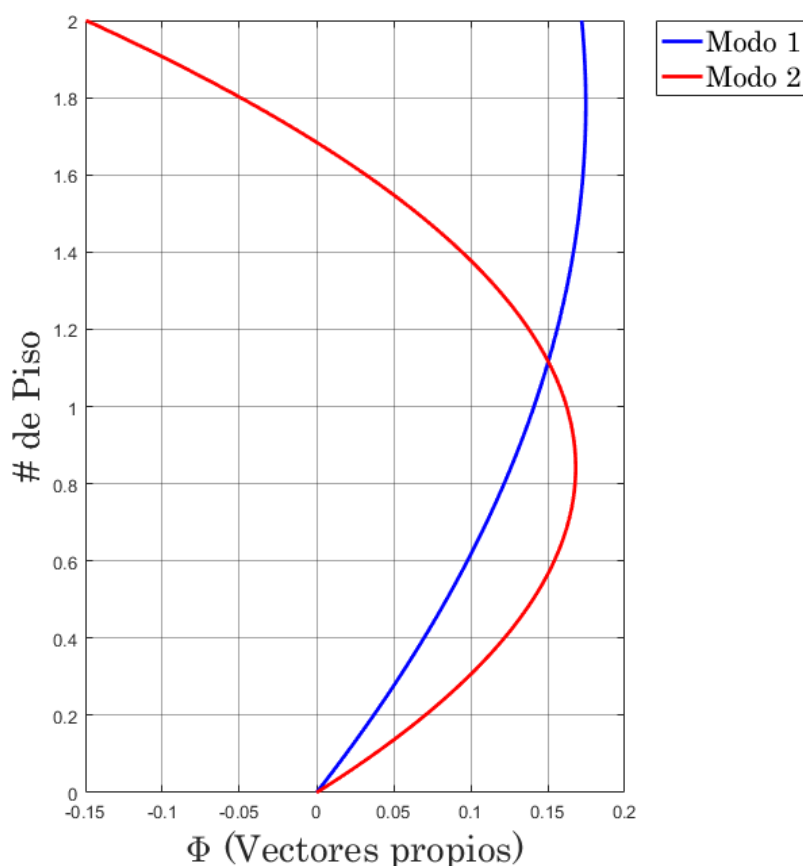


Figura 6.15: Diagramas modales.

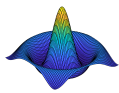
6.3.3. Ejemplo: Análisis modal de un sistema no amortiguado en vibración forzada (5 pisos)

Se resuelve el análisis modal del sistema de la figura 6.16, siendo las matrices de masas y de rigidez y el vector de fuerzas las expresiones 6.38a, 6.38b y 6.38c, respectivamente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.23 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (6.38a)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 108130.00 & -84922.00 & 27513.00 & -5501.70 & 838.58 \\ -84922.00 & 134650.00 & -91901.00 & 28244.00 & -4305.00 \\ 27513.00 & -91901.00 & 135800.00 & -88718.00 & 21044.00 \\ -5501.70 & 28244.00 & -88718.00 & 118480.00 & -53252.00 \\ 838.58 & -4305.00 & 21044.00 & -53252.00 & 35789.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.38b)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \end{bmatrix} kN \quad (6.38c)$$



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

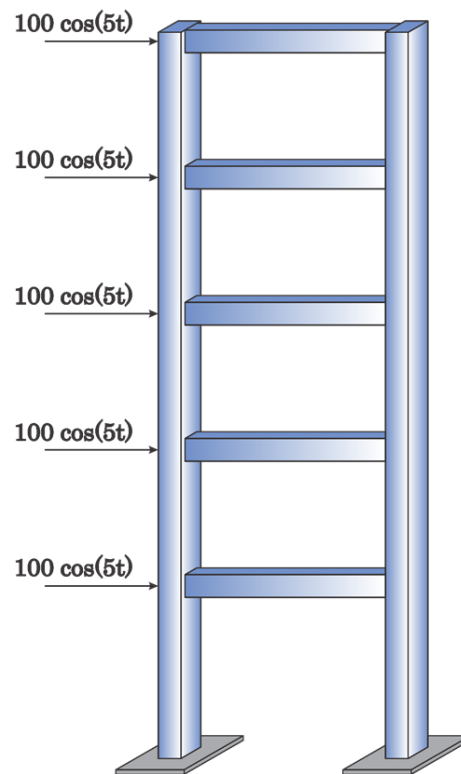


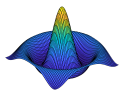
Figura 6.16: Estructura a ser sometida en vibración forzada sin amortiguamiento.

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema9**;

```
1 function dydt=sistema9(t,y,wn,Ft,F)
2 dydt=zeros(2,1);
3 F=interp1(Ft,F,t);
4 dydt(1)=y(2);
5 dydt(2)=(-wn^2)*y(1)+F;
```

posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado parcialmente en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal para sistemas de múltiples grados de libertad en
2 % vibración forzada por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco
3 % Guzmán López. Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería
4 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Ingreso de datos
8 Masa=diag([21.63 19.23 19.23 19.23 19.23]); % Matriz de masa de la estructura
9 KK=[108128.2746 -84921.5701 27513.3226 -5501.7202 838.5785; -84921.5701 134651.7709
    -91901.0728 28244.2442 -4305.0202; 27513.3226 -91901.0728 135797.7999
    -88717.6589 21043.5763; -5501.7202 28244.2442 -88717.6589 118480.0280
    -53251.9584; 838.5785 -4305.0202 21043.5763 -53251.9584 35788.6924]; % Matriz de rigidez de la estructura
10 t=0:0.01:10; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo
11 cond=[0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento | velocidad) (Continúa ...)
```



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

Resultados:

Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.17). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.18). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.19). La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.20).

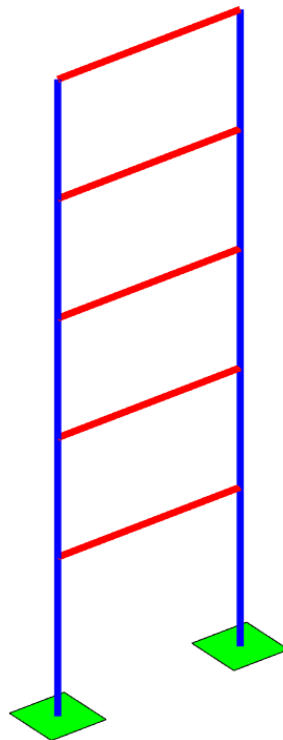
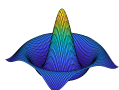


Figura 6.17: Modelo del pórtico de 5 pisos.

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Desplazamiento 3	Tiempo	Desplazamiento 4	Tiempo	Desplazamiento 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	2.2687e-04	0.0100	2.5985e-04	0.0100	2.5890e-04	0.0100	2.5895e-04	0.0100	2.5893e-04
0.0200	8.6688e-04	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010
0.0300	0.0018	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023
0.0400	0.0030	0.0400	0.0041	0.0400	0.0041	0.0400	0.0041	0.0400	0.0041
0.0500	0.0043	0.0500	0.0063	0.0500	0.0065	0.0500	0.0064	0.0500	0.0064
0.0600	0.0057	0.0600	0.0088	0.0600	0.0094	0.0600	0.0092	0.0600	0.0091
0.0700	0.0071	0.0700	0.0114	0.0700	0.0128	0.0700	0.0125	0.0700	0.0123
0.0800	0.0085	0.0800	0.0142	0.0800	0.0165	0.0800	0.0165	0.0800	0.0160
0.0900	0.0100	0.0900	0.0171	0.0900	0.0204	0.0900	0.0209	0.0900	0.0203
0.1000	0.0114	0.1000	0.0200	0.1000	0.0246	0.1000	0.0258	0.1000	0.0251
0.1100	0.0128	0.1100	0.0230	0.1100	0.0289	0.1100	0.0309	0.1100	0.0305
0.1200	0.0142	0.1200	0.0259	0.1200	0.0333	0.1200	0.0362	0.1200	0.0366

Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2	Tiempo	Velocidad 3	Tiempo	Velocidad 4	Tiempo	Velocidad 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	0.0446	0.0100	0.0520	0.0100	0.0517	0.0100	0.0517	0.0100	0.0517
0.0200	0.0817	0.0200	0.1046	0.0200	0.1030	0.0200	0.1026	0.0200	0.1027
0.0300	0.1079	0.0300	0.1556	0.0300	0.1554	0.0300	0.1527	0.0300	0.1531
0.0400	0.1244	0.0400	0.2000	0.0400	0.2097	0.0400	0.2025	0.0400	0.2027
0.0500	0.1343	0.0500	0.2340	0.0500	0.2641	0.0500	0.2540	0.0500	0.2510
0.0600	0.1401	0.0600	0.2576	0.0600	0.3137	0.0600	0.3088	0.0600	0.2981
0.0700	0.1432	0.0700	0.2732	0.0700	0.3544	0.0700	0.3658	0.0700	0.3456
0.0800	0.1443	0.0800	0.2834	0.0800	0.3855	0.0800	0.4199	0.0800	0.3962
0.0900	0.1442	0.0900	0.2899	0.0900	0.4092	0.0900	0.4655	0.0900	0.4524
0.1000	0.1432	0.1000	0.2937	0.1000	0.4261	0.1000	0.4996	0.1000	0.5134
0.1100	0.1415	0.1100	0.2955	0.1100	0.4351	0.1100	0.5245	0.1100	0.5750
0.1200	0.1394	0.1200	0.2949	0.1200	0.4356	0.1200	0.5451	0.1200	0.6317

Figura 6.18: Historiales de respuestas en forma tabular.



6.3. Análisis modal de sistemas no amortiguados en vibración forzada

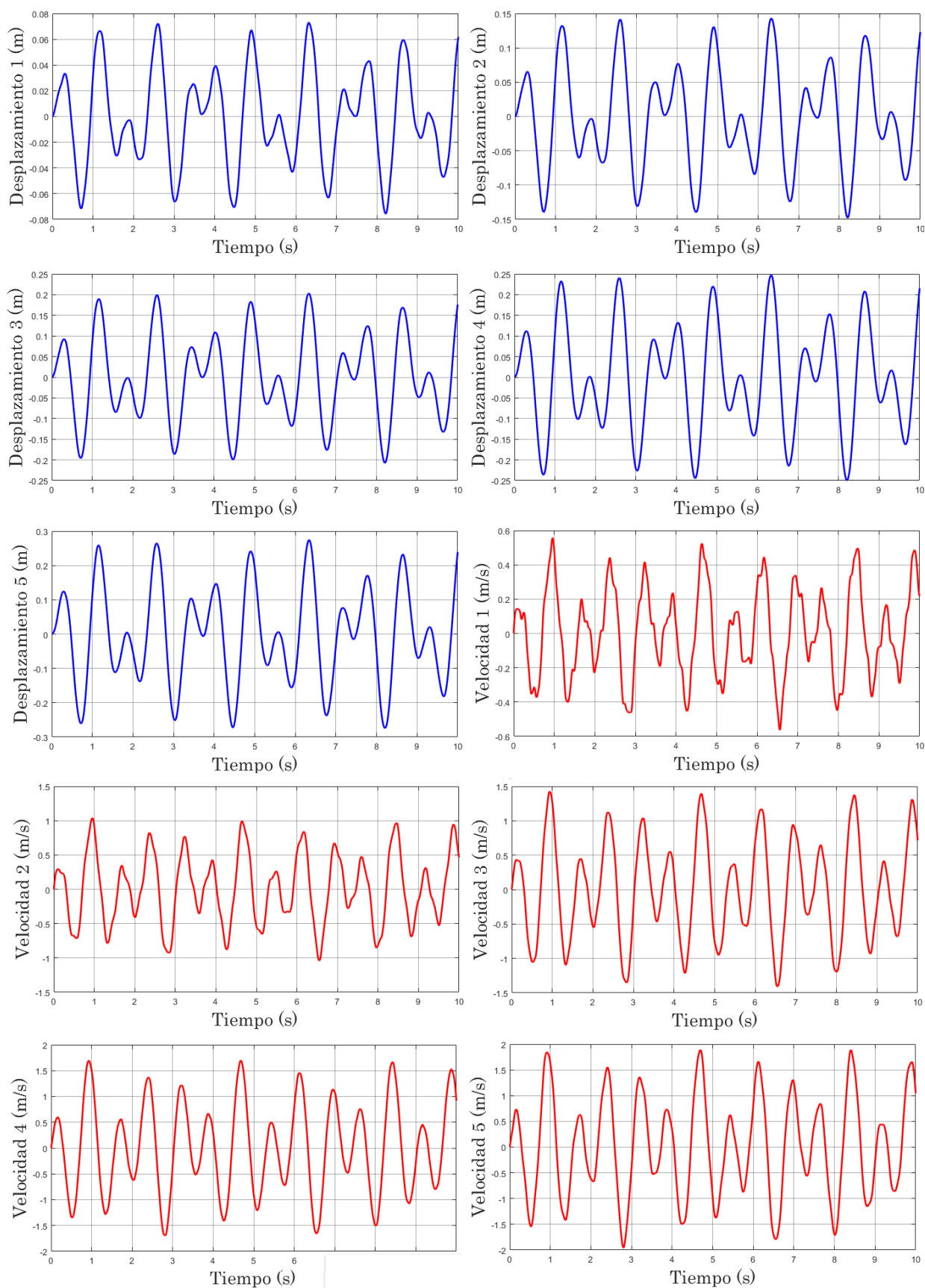
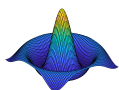


Figura 6.19: Historiales de desplazamientos y velocidades.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

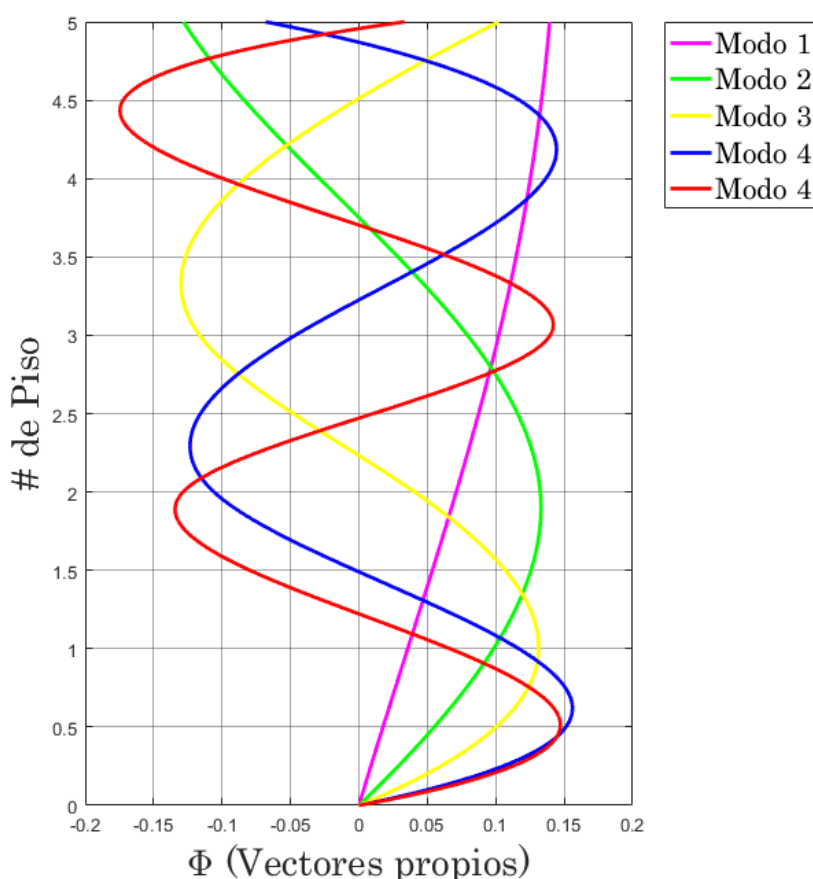


Figura 6.20: Diagramas modales.

6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

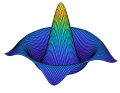
La base del planteamiento del problema es la ecuación diferencial de equilibrio de un sistema amortiguado en vibración forzada; dicha ecuación es la siguiente (ecuación 6.39):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (6.39)$$

A continuación, se presenta la deducción de las ecuaciones modales de un sistema amortiguado en vibración forzada y la solución mediante código fuente de MATLAB® del mismo sistema. Habiendo también un ejemplo con más pisos, con la finalidad de ilustrar el procedimiento que conlleva su resolución.

6.4.1. Ecuaciones en coordenadas modales de un sistema amortiguado en vibración forzada (2 pisos)

Realizar el análisis modal del sistema estructural correspondiente al mostrado en la figura 6.21, asumiendo un modelo simplificado de corte; al cual le corresponden los siguientes datos: $f_1(t) = 100\cos(5t)$, $f_2(t) = 100\cos(5t)$, $m_1 = 21.63 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $m_2 = 19.23 \text{ kN} \cdot \text{s}^2/\text{m}$, $k_{11} = 140323.1055 \text{ kN/m}$, $k_{12} = -98688.7775 \text{ kN/m}$, $k_{21} = -98688.7775 \text{ kN/m}$ y $k_{22} = 98688.7775 \text{ kN/m}$.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

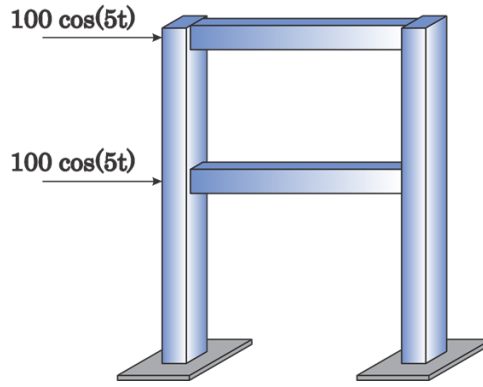


Figura 6.21: Pórtico de 2 pisos con fuerzas laterales en sus entrepisos.

Solución: El procedimiento del desarrollo detallado para obtener las ecuaciones modales es el siguiente:

Se construyen las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, y el vector de fuerzas del sistema; mostrados en las expresiones 6.40a, 6.40b, 6.40c y 6.40d, respectivamente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \quad (6.40a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 155.6715 & -73.7523 \\ -73.7523 & 118.9201 \end{bmatrix} \quad (6.40b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \quad (6.40c)$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \end{bmatrix} \quad (6.40d)$$

Siendo la ecuación compacta y la ecuación matricial de equilibrio del sistema en vibración libre, las mostradas en la ecuación 6.41a y 6.41b, respectivamente.

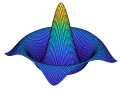
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (6.41a)$$

$$\begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 155.6715 & -73.7523 \\ -73.7523 & 118.9201 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.41b)$$

Luego, con las matrices masa $\mathbf{M}$ y rigidez $\mathbf{K}$ se plantea el problema de valores característicos, mostrado en la ecuación 6.42;

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 \end{bmatrix} [\phi] = \omega^2 \begin{bmatrix} 21.63 & 0 \\ 0 & 19.23 \end{bmatrix} [\phi] \quad (6.42)$$

o de forma conveniente reescribir la ecuación 6.42 a la ecuación 6.43, donde se despeja la ecuación para obtener todas las variables en un solo lado de la ecuación.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

$$\begin{bmatrix} 140323.1055 - 21.63\omega^2 & -98688.7775 \\ -98688.7775 & 98688.7775 - 19.23\omega^2 \end{bmatrix} [\phi] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Mediante un procedimiento igual al realizado en el establecimiento de *ecuaciones en coordenadas modales de un sistema en vibración libre (2 pisos)*, se obtiene la siguiente matriz de vectores propios.

$$\phi = [\phi_1 \quad \phi_2] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1411 & 0.1622 \\ 0.1721 & -0.1496 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

la cual se comprueba es correcta, ya que al realizar la operación $\phi^T \mathbf{M} \phi$ se obtiene la matriz de masas generalizada $\mathbf{M}_g$ (matriz identidad), mostrada en la ecuación 6.45.

$$\phi^T \mathbf{M} \phi = \mathbf{M}_g = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

Por otra parte, la matriz de rigideces generalizada $\mathbf{K}_g$ se muestra en la expresión 6.46.

$$\phi^T \mathbf{K} \phi = \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

La matriz de amortiguamiento generalizada $\mathbf{C}_g$ resulta en la expresión 6.47.

$$\phi^T \mathbf{C} \phi = \mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0390 & 0 \\ 0 & 10.3421 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

Luego de haber obtenido las matrices de masas, amortiguamientos y rigideces generalizadas ($\mathbf{M}_g$, $\mathbf{C}_g$ y $\mathbf{K}_g$), se puede proceder con más acierto a plantear el sistema en coordenadas modales. Para ello, la base es la ecuación 6.39, la cual se vuelve a mostrar aquí:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{t})$$

Siendo posible representar el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ y su primera y doble derivada en términos de las coordenadas modales ($\varphi_1(t)$) y ($\varphi_2(t)$), como se muestra en las expresiones 6.48a, 6.48b y 6.48c;

$$u = \phi\varphi \quad (6.48a)$$

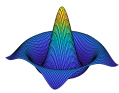
$$\dot{u} = \phi\dot{\varphi} \quad (6.48b)$$

$$\ddot{u} = \phi\ddot{\varphi} \quad (6.48c)$$

se pasa a reemplazar las expresiones 6.48a, 6.48b y 6.48c en la ecuación 6.39 y se utiliza el argumento de multiplicar a todos los términos por ϕ^T , con la finalidad de obtener expresiones equivalentes a las matrices de masas y rigideces generalizadas; como se muestra en las ecuaciones 6.49a y 6.49b.

$$\phi^T \mathbf{M} \phi \ddot{\varphi} + \phi^T \mathbf{C} \phi \dot{\varphi} + \phi^T \mathbf{K} \phi \varphi = \phi^T \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (6.49a)$$

$$\mathbf{I} \ddot{\varphi} + \mathbf{C}_g \dot{\varphi} + \mathbf{K}_g \varphi = \phi^T \mathbf{f}(\mathbf{t}) \quad (6.49b)$$



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

Finalmente, representando la ecuación 6.49b en forma matricial resulta la ecuación 6.50; la cual, al ser desacoplada, genera las ecuaciones (6.51a y 6.51b) en coordenadas modales que representan el sistema en vibración forzada amortiguada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1(t) \\ \ddot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3.0390 & 0 \\ 0 & 10.3421 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 923.5633 & 0 \\ 0 & 10695.8882 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = \phi^T \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

$$\ddot{\varphi}_1(t) + 3.0390\dot{\varphi}_1(t) + 923.5633\varphi_1(t) = \phi_{11}f_1(t) + \phi_{21}f_2(t) \quad (6.51a)$$

$$\ddot{\varphi}_2(t) + 10.3421\dot{\varphi}_2(t) + 10695.8882\varphi_2(t) = \phi_{12}f_1(t) + \phi_{22}f_2(t) \quad (6.51b)$$

Condiciones iniciales de desplazamiento y velocidad escritas en coordenadas físicas (expresión 6.52)

$$u(0) = u_0 \quad y \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad (6.52)$$

pueden ser representadas en coordenadas modales de distintas formas, como se presenta en las expresiones 6.53a, 6.53b, 6.53c y 6.53d.

$$u_0 = u(0) = \phi\varphi(0) \quad y \quad v_0 = \dot{u}(0) = \phi\dot{\varphi}(0) \quad (6.53a)$$

$$\varphi_0 = \varphi(0) = \phi^{-1}u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0) = \phi^{-1}v_0 \quad (6.53b)$$

$$\varphi_0 = \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.53c)$$

$$\varphi_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} u_0 \quad y \quad \dot{\varphi}_0 = \mathbf{M}_g^{-1} \phi^T \mathbf{M} v_0 \quad (6.53d)$$

6.4.2. Ejemplo: Análisis modal de un sistema amortiguado en vibración forzada (2 pisos)

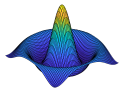
Se resuelve el análisis modal completo del ejemplo anterior en código fuente.

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema12**;

```
1 function dydt=sistema12(t,y,wn,epsilon,Ft,F)
2 dydt=zeros(2,1);
3 F=interp1(Ft,F,t);
4 dydt(1)=y(2);
5 dydt(2)=(-wn^2)*y(1)-2*epsilon*wn*y(2)+F;
```

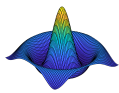
posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal en vibración forzada con amortiguamiento. Por
2 % Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco Guzmán López.
3 % Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería Estructural
4 % de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
```



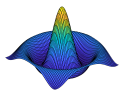
6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

```
7 % Ingreso de datos
8 Masa=[21.63 0; 0 19.23]; % Matriz de masa de la estructura
9 KK=[140323.1055 -98688.7775; -98688.7775 98688.7775]; % Matriz de ←
    rigidez de la estructura
10 CC=[155.6715 -73.7523; -73.7523 118.9201];
11 epsilon=[0.05 0.05];
12 t=0:0.01:10; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo
13 cond=[0 0; 0 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento | velocidad)
14 % Análisis Modal
15 % Vectores propios, valores propios y frecuencias naturales
16 [Evector, Evalor]=eig(KK,Masa);
17 wn=sort(sqrt(diag(Evalor)));
18 % Normalización de vectores propios
19 [row,col]=size(Masa);
20 for i=1:col
21     [a,b]=max(abs(Evector(:,i)));
22     Evector(:,i)=Evector(:,i)/Evector(b,i);
23 end
24 % Masas y rigideces generalizadas
25 for i=1:col
26     M(i)=Evector(:,i)'*Masa*Evector(:,i);
27 end
28 for i=1:col
29     K(i)=Evector(:,i)'*KK*Evector(:,i);
30 end
31 % Renormalización respecto a la masa
32 for i=1:col
33     c(i)=sqrt(1/M(i));
34 end
35 for i=1:col
36     Evector(:,i)=c(i)*Evector(:,i);
37 end
38 % Condiciones iniciales modales
39 condn=[Evector'*Masa*cond(:,1) Evector'*Masa*cond(:,2)];
40 % Determinación de fuerzas
41 Ft=linspace(0,t(1,end),100);
42 F=zeros(col,length(Ft));
43 F(1,:)=100*cos(5*Ft);
44 F(2,:)=100*cos(5*Ft);
45 F=Evector'*F;
46 % Solución en coordenadas normales
47 for i=1:col
48     [t,y(:, :, i)]=ode45(@(t,y) sistema12(t,y,wn(i),epsilon(i),Ft,F(i,:)),t, ←
        condn(i, :));
49 end
50 % Cálculo para desplazamiento
51 yy=y(:,1,1);
52 for i=2:col
53     yy=[yy y(:,1,i)];
54 end
55 u=Evector*yy';
56 % Cálculo para velocidad
57 vv=y(:,2,1);
58 for i=2:col
59     vv=[vv y(:,2,i)];
60 end
61 v=Evector*vv';
```



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

```
62 % Visualización numérica de los resultados.
63 f=figure('Name','Visualización numérica del Análisis Modal','NumberTitle'←
    ', 'off','Position',[500 500 875 305]);
64 set(gcf,'Color','w')
65 cnames={'Tiempo','Desplazamiento 1'};
66 uitable('Parent',f,'Data',[t u(1,:)'], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[40 25 193.5 255]);
67 cnames={'Tiempo','Desplazamiento 2'};
68 uitable('Parent',f,'Data',[t u(2,:)'], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[255 25 193.5 255]);
69 cnames={'Tiempo','Velocidad 1'};
70 uitable('Parent',f,'Data',[t v(1,:)'], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[472.5 25 172.5 255]);
71 cnames={'Tiempo','Velocidad 2'};
72 uitable('Parent',f,'Data',[t v(2,:)'], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '←
    Position',[665 25 172.5 255]);
73 % Diagramas modales
74 EV(2:3,1:2)=Evector;
75 figure('Name','Modos de vibración','NumberTitle','off','Position',[550 ←
    175 650 700])
76 set(gca,'Color','w')
77 set(gcf,'Color','w')
78 for i=1:2
79     x=EV(:,i);
80     y=0:2;
81     yy=0:0.01:max(y);
82     xx=interp1(y,x,yy,'spline');
83     plot(xx,yy,'Color',rand(3,1),'LineWidth',2)
84     xlabel('\Phi (Vectores propios)','FontSize',20,'FontName','Century')
85     ylabel('# de Piso','FontSize',20,'FontName','Century')
86     title('Diagramas Modales','FontName','Century','FontSize',20)
87     hleg=legend('Modo 1','Modo 2','Modo 3','Modo 4','Modo 4','Location','←
        NorthEastOutside');
88     set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',16)
89     hold on
90     grid on
91     set(gca,'GridAlpha',0.40);
92 end
93 % Visualización gráfica de los resultados - Desplazamientos.
94 figure('Name','Visualización numérica de los resultados - ←
    Desplazamientos','NumberTitle','off','units','normalized','←
    outerposition',[0 0 1 1])
95 subplot(2,2,1)
96 set(gcf,'Color','w')
97 plot(t,u(1,:), 'b', 'LineWidth',2)
98 grid on
99 set(gca,'GridAlpha',0.40);
100 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←
    normal')
101 ylabel('Desplazamiento 1 (m)','FontName','Century','FontSize',20,'←
    FontWeight','normal')
102 subplot(2,2,2)
103 plot(t,u(2,:), 'b', 'LineWidth',2)
104 grid on
105 set(gca,'GridAlpha',0.40);
106 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',20,'FontWeight','←
    normal')
```

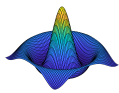


6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

```
107 ylabel('Desplazamiento 2 (m)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, '↵  
    FontWeight', 'normal')  
108 % Visualización gráfica de los resultados - Velocidades.  
109 figure('Name', 'Visualización numérica de los resultados - Velocidades', '↵  
    NumberTitle', 'off', 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1])  
110 subplot(2,2,1)  
111 set(gcf, 'Color', 'w')  
112 plot(t, v(1,:), 'r', 'LineWidth', 2)  
113 grid on  
114 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);  
115 xlabel('Tiempo (s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, 'FontWeight', '↵  
    normal')  
116 ylabel('Velocidad 1 (m/s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, '↵  
    FontWeight', 'normal')  
117 subplot(2,2,2)  
118 plot(t, v(2,:), 'r', 'LineWidth', 2), grid on  
119 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);  
120 xlabel('Tiempo (s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, 'FontWeight', '↵  
    normal')  
121 ylabel('Velocidad 2 (m/s)', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20, '↵  
    FontWeight', 'normal')  
122 % Visualización interactiva  
123 figure('Name', 'Visualización interactiva de desplazamientos', '↵  
    NumberTitle', 'off', 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1])  
124 set(gcf, 'Color', 'w')  
125 set(gca, 'Color', 'w', 'Visible', 'off')  
126 axis tight  
127 x1=20*u(1,:);  
128 x2=20*u(2,:);  
129 for k=1:10 %length(x1)  
130     y1=4*ones(1, length(x1));  
131     y2=7*ones(1, length(x2));  
132     plot3([x1(k) 5+x1(k)], [0 0], [y1(k) y1(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 7.5)  
133     hold on  
134     plot3([x2(k) 5+x2(k)], [0 0], [y2(k) y2(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 7.5)  
135     set(gca, 'Color', 'w', 'Visible', 'off')  
136     plot3([0 x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], [5 5+x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], 'Color', 'b↵  
        ', 'LineWidth', 7.5)  
137     plot3([x1(k) x2(k)], [0 0], [y1(k) y2(k)], [5+x1(k) 5+x2(k)], [0 0], [y1(k)↵  
        y2(k)], 'Color', 'b', 'LineWidth', 7.5)  
138     fill3([-0.50 -0.50 0.50 0.50], [-0.50 0.50 0.50 -0.50], [0 0 0 0], 'g')  
139     fill3([4.50 4.50 5.50 5.50], [-0.50 0.50 0.50 -0.50], [0 0 0 0], 'g')  
140     axis equal  
141     axis([-1.5 6.5 -1 1 0 7.05])  
142     drawnow  
143     pause(0.0125)  
144     hold off  
145 end
```

Resultados:

Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.22). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.23). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.24). La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.25).



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

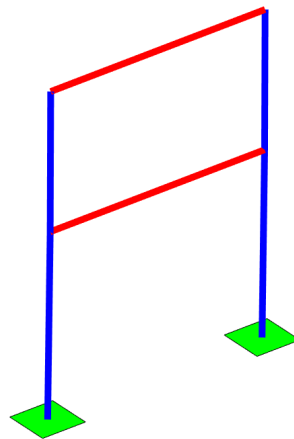


Figura 6.22: Modelo del pórtico de 2 pisos.

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2
0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	2.2586e-04	0.0100	2.5611e-04	0.0100	0.0444	0.0100	0.0507
0.0200	8.6499e-04	0.0200	9.9812e-04	0.0200	0.0819	0.0200	0.0966
0.0300	0.0018	0.0300	0.0022	0.0300	0.1094	0.0300	0.1333
0.0400	0.0030	0.0400	0.0036	0.0400	0.1259	0.0400	0.1564
0.0500	0.0043	0.0500	0.0052	0.0500	0.1313	0.0500	0.1631
0.0600	0.0056	0.0600	0.0068	0.0600	0.1253	0.0600	0.1531
0.0700	0.0068	0.0700	0.0082	0.0700	0.1076	0.0700	0.1288
0.0800	0.0077	0.0800	0.0094	0.0800	0.0789	0.0800	0.0937
0.0900	0.0083	0.0900	0.0101	0.0900	0.0420	0.0900	0.0510
0.1000	0.0085	0.1000	0.0104	0.1000	0.0015	0.1000	0.0040
0.1100	0.0084	0.1100	0.0102	0.1100	-0.0381	0.1100	-0.0441
0.1200	0.0078	0.1200	0.0095	0.1200	-0.0733	0.1200	-0.0889

Figura 6.23: Historiales de respuestas en forma tabular.

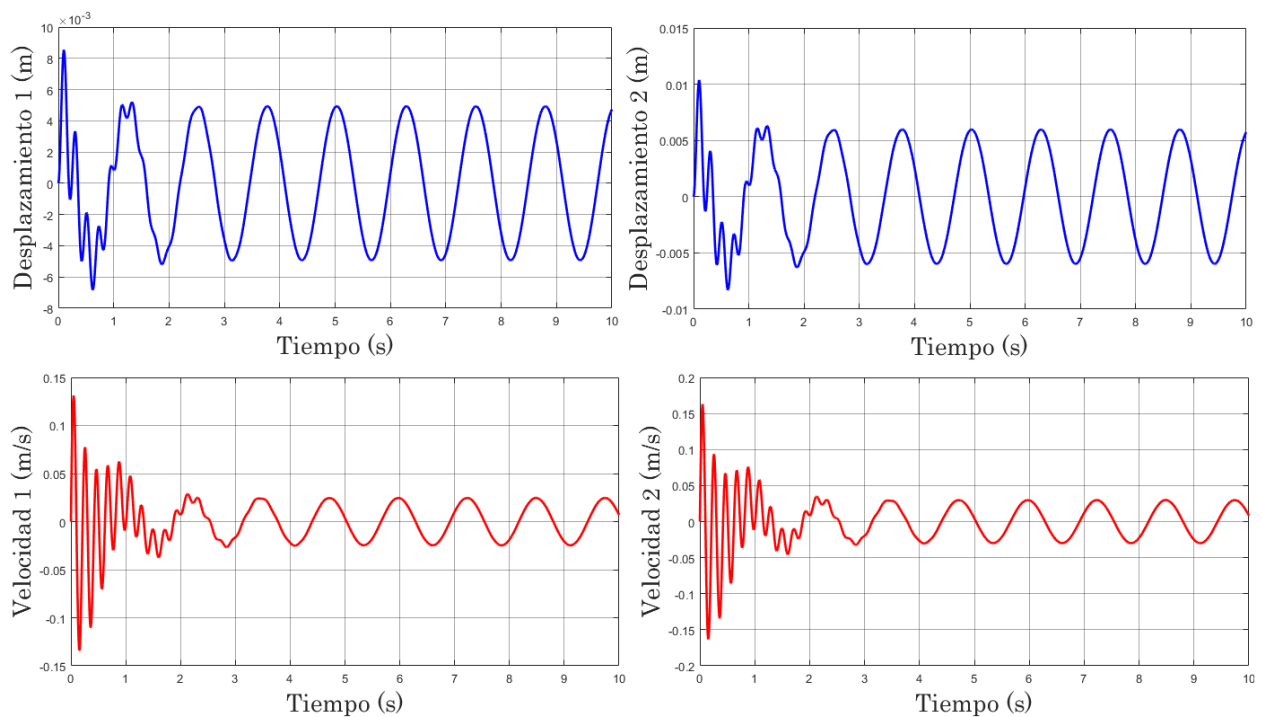
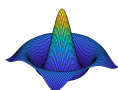


Figura 6.24: Historiales de desplazamientos y velocidades.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

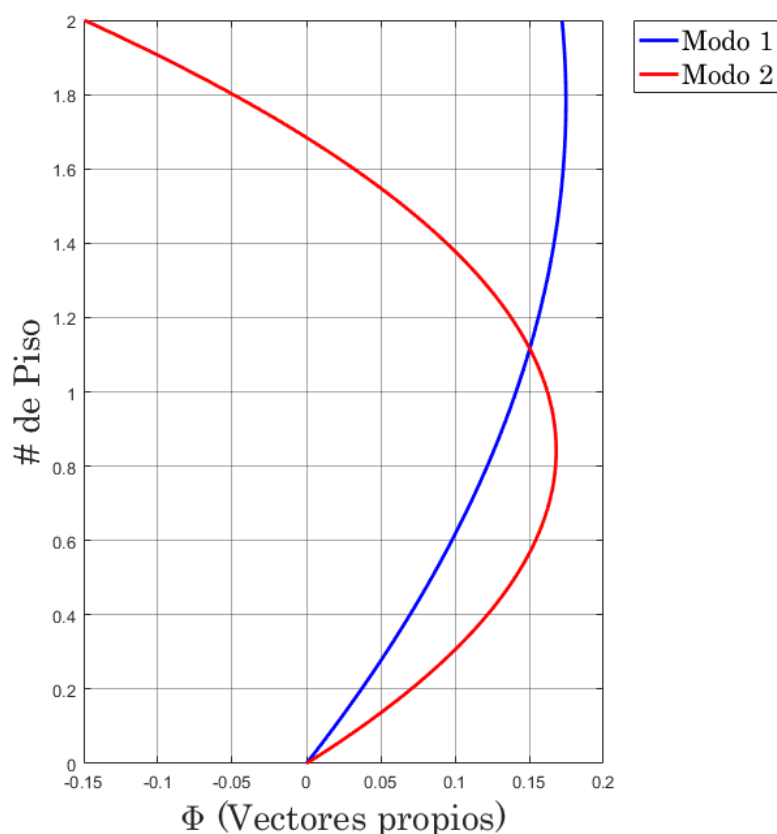


Figura 6.25: Diagramas modales.

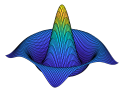
6.4.3. Ejemplo: Análisis modal de un sistema amortiguado en vibración forzada (5 pisos)

Se resuelve el análisis modal completo del sistema de la figura 6.26, siendo las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, y el vector de fuerzas las expresiones 6.54a, 6.54b, 6.54c y 6.54d, respectivamente.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 21.63 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 19.23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19.23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.23 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (6.54a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 314.5136 & -236.0692 & 76.4829 & -15.2940 & 2.3311 \\ -236.0692 & 386.6989 & -255.4712 & 78.5147 & -11.9673 \\ 76.4829 & -255.4712 & 389.8847 & -246.6217 & 58.4980 \\ -15.2940 & 78.5147 & -246.6217 & 341.7439 & -148.0324 \\ 2.3311 & -11.9673 & 58.4980 & -148.0324 & 111.8744 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (6.54b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 108130.00 & -84922.00 & 27513.00 & -5501.70 & 838.58 \\ -84922.00 & 134650.00 & -91901.00 & 28244.00 & -4305.00 \\ 27513.00 & -91901.00 & 135800.00 & -88718.00 & 21044.00 \\ -5501.70 & 28244.00 & -88718.00 & 118480.00 & -53252.00 \\ 838.58 & -4305.00 & 21044.00 & -53252.00 & 35789.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (6.54c)$$



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \\ 100\cos(5t) \end{bmatrix} kN \quad (6.54d)$$

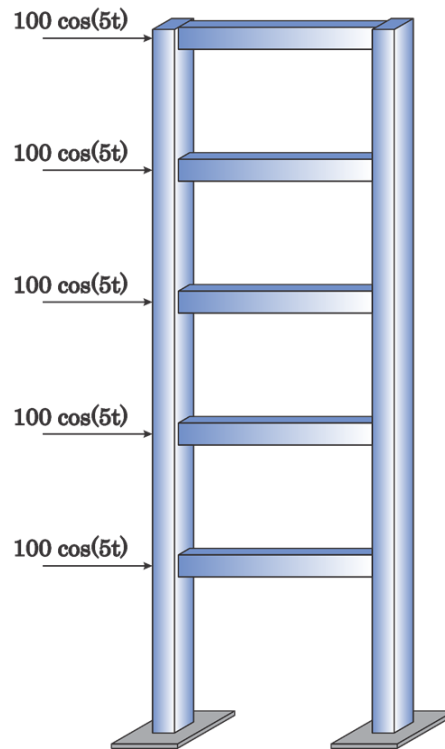


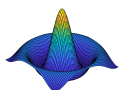
Figura 6.26: Pórtico bidimensional de 5 niveles con fuerzas laterales en sus entrepisos.

Solución: Primero se crea la función personalizada de nombre **sistema12**;

```
1 function dydt=sistema12(t,y,wn,epsilon,Ft,F)
2 dydt=zeros(2,1);
3 F=interp1(Ft,F,t);
4 dydt(1)=y(2);
5 dydt(2)=(-wn^2)*y(1)-2*epsilon*wn*y(2)+F;
```

posteriormente, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema corresponde al código fuente mostrado parcialmente en el siguiente script:

```
1 % Análisis modal en vibración forzada con amortiguamiento. Por
2 % Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado y Ing. Raul Franco Guzmán López.
3 % Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería Estructural
4 % de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Ingreso de datos
8 Masa=diag([21.63 19.23 19.23 19.23 19.23]); % Matriz de masa
9 CC=[314.5136 -236.0692 76.4829 -15.2940 2.3311; -236.0692 386.6989 ↵
    -255.4712 78.5147 -11.9673; 76.4829 -255.4712 389.8847 -246.6217 ↵
    58.4980; -15.2940 78.5147 -246.6217 341.7439 -148.0324; 2.3311 ↵
```



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

```
10      -11.9673  58.4980 -148.0324 111.8744]; Matriz de amortiguamiento  
      KK=[108128.2746 -84921.5701 27513.3226 -5501.7202 838.5785; -84921.5701 ↵  
          134651.7709 -91901.0728 28244.2442 -4305.0202; 27513.3226 -91901.0728 ↵  
          135797.7999 -88717.6589 21043.5763; -5501.7202 28244.2442 ↵  
          -88717.6589 118480.0280 -53251.9584; 838.5785 -4305.0202 21043.5763 ↵  
          -53251.9584 35788.6924]; % Matriz de rigidez  
11  epsilon=[0.0500 0.0500 0.0802 0.1259 0.1766];  
12  t=0:0.01:20; % Tiempo de la simulación y paso del tiempo  
13  cond=[0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0]; % Condiciones iniciales (Desplazamiento ↵  
      | velocidad) (Continúa ...)
```

Resultados:

La representación gráfica de los modos de forma del sistema (figura 6.27). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.28). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 6.29). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 6.30).

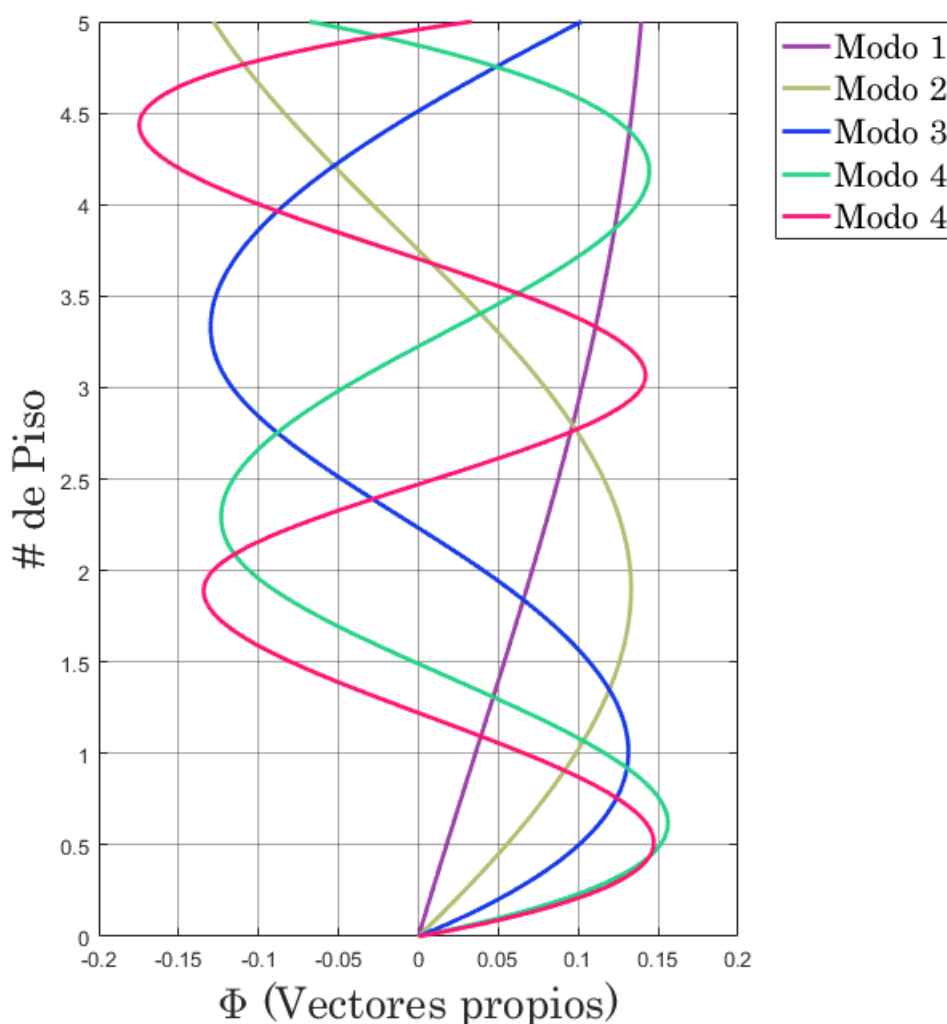
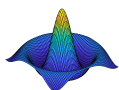


Figura 6.27: Diagramas modales.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

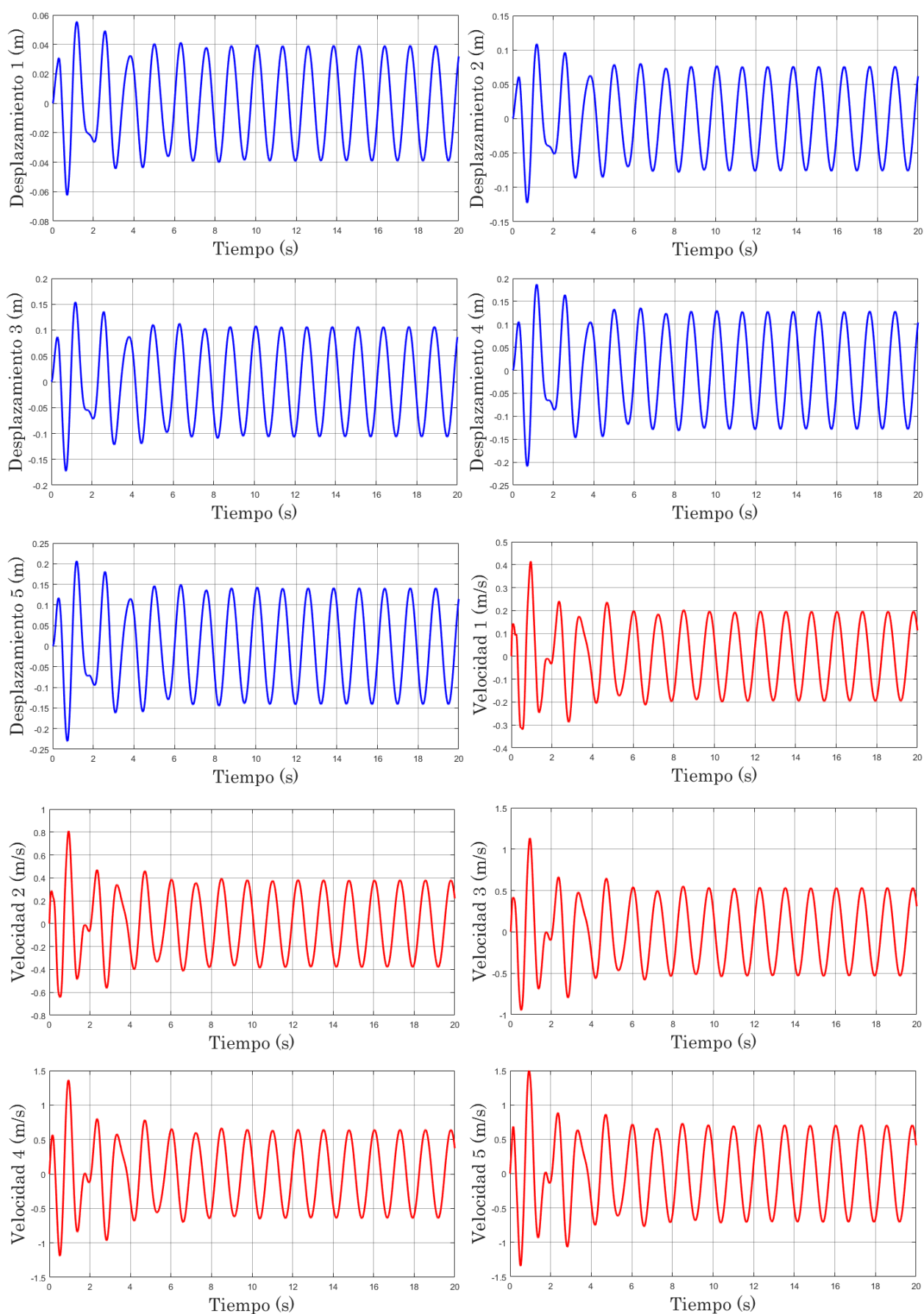
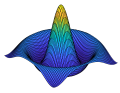


Figura 6.28: Historiales de desplazamientos y velocidades.



6.4. Análisis modal de sistemas amortiguados en vibración forzada

Tiempo	Desplazamiento 1	Tiempo	Desplazamiento 2	Tiempo	Desplazamiento 3	Tiempo	Desplazamiento 4	Tiempo	Desplazamiento 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	2.2354e-04	0.0100	2.6066e-04	0.0100	2.5905e-04	0.0100	2.5901e-04	0.0100	2.5902e-04
0.0200	8.4560e-04	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010	0.0200	0.0010
0.0300	0.0018	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023	0.0300	0.0023
0.0400	0.0029	0.0400	0.0041	0.0400	0.0042	0.0400	0.0041	0.0400	0.0041
0.0500	0.0042	0.0500	0.0062	0.0500	0.0065	0.0500	0.0064	0.0500	0.0064
0.0600	0.0055	0.0600	0.0086	0.0600	0.0094	0.0600	0.0092	0.0600	0.0091
0.0700	0.0069	0.0700	0.0112	0.0700	0.0127	0.0700	0.0126	0.0700	0.0124
0.0800	0.0084	0.0800	0.0140	0.0800	0.0163	0.0800	0.0165	0.0800	0.0161
0.0900	0.0098	0.0900	0.0168	0.0900	0.0201	0.0900	0.0208	0.0900	0.0203
0.1000	0.0112	0.1000	0.0197	0.1000	0.0242	0.1000	0.0254	0.1000	0.0251
0.1100	0.0126	0.1100	0.0225	0.1100	0.0283	0.1100	0.0304	0.1100	0.0304
0.1200	0.0140	0.1200	0.0254	0.1200	0.0325	0.1200	0.0356	0.1200	0.0363

Tiempo	Velocidad 1	Tiempo	Velocidad 2	Tiempo	Velocidad 3	Tiempo	Velocidad 4	Tiempo	Velocidad 5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0100	0.0437	0.0100	0.0522	0.0100	0.0517	0.0100	0.0517	0.0100	0.0517
0.0200	0.0791	0.0200	0.1044	0.0200	0.1036	0.0200	0.1027	0.0200	0.1028
0.0300	0.1046	0.0300	0.1534	0.0300	0.1566	0.0300	0.1533	0.0300	0.1534
0.0400	0.1217	0.0400	0.1955	0.0400	0.2101	0.0400	0.2042	0.0400	0.2028
0.0500	0.1324	0.0500	0.2284	0.0500	0.2615	0.0500	0.2565	0.0500	0.2512
0.0600	0.1386	0.0600	0.2522	0.0600	0.3075	0.0600	0.3098	0.0600	0.2991
0.0700	0.1418	0.0700	0.2683	0.0700	0.3458	0.0700	0.3620	0.0700	0.3480
0.0800	0.1428	0.0800	0.2787	0.0800	0.3757	0.0800	0.4096	0.0800	0.3989
0.0900	0.1422	0.0900	0.2845	0.0900	0.3973	0.0900	0.4500	0.0900	0.4520
0.1000	0.1405	0.1000	0.2869	0.1000	0.4111	0.1000	0.4827	0.1000	0.5058
0.1100	0.1383	0.1100	0.2861	0.1100	0.4179	0.1100	0.5086	0.1100	0.5575
0.1200	0.1358	0.1200	0.2823	0.1200	0.4194	0.1200	0.5291	0.1200	0.6038

Figura 6.29: Historiales de respuestas en forma tabular.

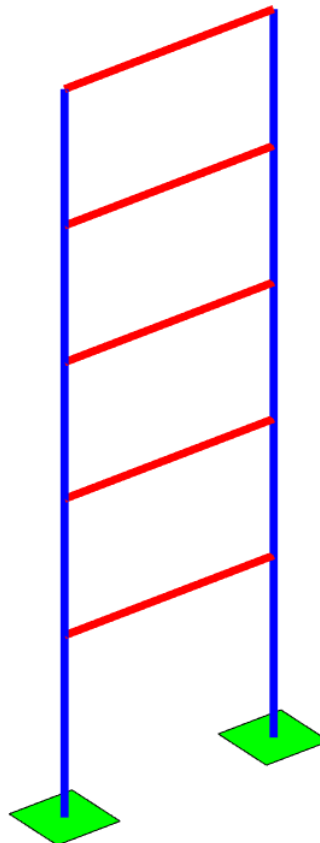
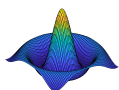


Figura 6.30: Modelo del pórtico de 5 pisos.



7. Desplazamientos y velocidades obtenidos del registro de aceleraciones del suelo y espectros de respuesta usando MATLAB®

7.1. Introducción

En este capítulo se presenta el desarrollo del código fuente en MATLAB® para la obtención de los registros de desplazamientos y velocidades, y la obtención de espectros de respuesta a partir de un registro de aceleraciones.

7.2. Velocidad y desplazamiento del registro sísmico

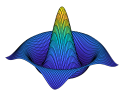
Los historiales de velocidad y desplazamiento se pueden obtener de un registro de aceleraciones del suelo utilizando un método de integración; como ya es conocido, al integrar aceleración se obtiene velocidad y al integrar la velocidad se obtiene el desplazamiento. En esta ocasión, se utiliza la función **cumtrapz** (método trapezoidal) de MATLAB® como método de integración.

7.2.1. Ejemplo: Velocidad y desplazamiento del registro sísmico

Hacer uso de la componente N-S del sismo de Pisco del 15 de agosto del 2007, previamente verificar esté corregido el error de línea base del registro, para obtener los historiales de velocidad y desplazamiento.

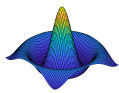
Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Desplazamientos y velocidades del registro de aceleraciones del
2 % suelo. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco Guzmán
3 % López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería Estructural
4 % de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
```



7.2. Velocidad y desplazamiento del registro sísmico

```
6  clc, clear, close all
7  % Ingreso de datos
8  load('IcaNS.mat');
9  Sismo=IcaNS;
10 Acel=Sismo(:,2)/100;
11 dt=Sismo(end,1)-Sismo(end-1,1); % Paso del tiempo
12 % Cálculos previos para obtener velocidad y desplazamiento
13 Vel=dt*cumtrapz(Acel);
14 Des=dt*cumtrapz(Vel);
15 % Trazo del registro de aceleraciones.
16 figure('Name','Registro de Aceleraciones.','NumberTitle','off','units','←
    normalized','outerposition',[0 0 1 1])
17 set(gcf,'Color','w')
18 subplot(2,1,1)
19 set(gca,'Color','w')
20 plot(Sismo(:,1),Acel,'g','LineWidth',0.5); grid on
21 xlim([0 Sismo(end,1)])
22 get(gca,'XTick');
23 set(gca,'FontSize', 12,'FontName','Century')
24 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',24,'FontWeight','←
    normal')
25 ylabel({'Aceleración','Registrada (m/s^2)'},'FontName','Century','←
    FontSize',24,'FontWeight','normal')
26 lgd=legend('Aceleración registrada');
27 lgd.FontSize=20;
28 lgd.FontName='Century';
29 set(gca,'GridAlpha',0.40);
30 % Trazo del registro de velocidades.
31 figure('Name','Registro de Velocidades.','NumberTitle','off','units','←
    normalized','outerposition',[0 0 1 1])
32 set(gcf,'Color','w')
33 subplot(2,1,1)
34 set(gca,'Color','w')
35 plot(Sismo(:,1),Vel,'r','LineWidth',0.5); grid on
36 xlim([0 Sismo(end,1)])
37 get(gca,'XTick');
38 set(gca,'FontSize', 12,'FontName','Century')
39 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',24,'FontWeight','←
    normal')
40 ylabel({'Velocidad','Registrada (m/s)'},'FontName','Century','FontSize'←
    ,24,'FontWeight','normal')
41 lgd=legend('Velocidad registrada');
42 lgd.FontSize=20;
43 lgd.FontName='Century';
44 set(gca,'GridAlpha',0.40);
45 % Trazo del registro de desplazamientos.
46 figure('Name','Registro de Desplazamientos.','NumberTitle','off','units'←
    , 'normalized','outerposition',[0 0 1 1])
47 set(gcf,'Color','w')
48 subplot(2,1,1)
49 set(gca,'Color','w')
50 plot(Sismo(:,1),Des,'b','LineWidth',0.5); grid on
51 xlim([0 Sismo(end,1)])
52 get(gca,'XTick');
53 set(gca,'FontSize', 12,'FontName','Century')
54 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',24,'FontWeight','←
    normal')
```



7.2. Velocidad y desplazamiento del registro sísmico

```
55 ylabel({'Desplazamiento','Registrado (m)'},'FontName','Century','↵  
    FontSize',24,'FontWeight','normal')  
56 lgd=legend('Desplazamiento registrado');  
57 lgd.FontSize=20;  
58 lgd.FontName='Century';  
59 set(gca,'GridAlpha',0.40);  
60 % Representación tabular.  
61 f=figure('Name','Desplazamiento, Velocidad y Aceleración del registro de↵  
    aceleraciones.','NumberTitle','off','Position',[500 500 675 300]);  
62 set(gcf,'Color','w')  
63 cnames={'Tiempo','Desplazamiento'};  
64 uitable('Parent',f,'Data',[Sismo(:,1) Des],'ColumnName',cnames,'RowName'↵  
    ,[],'Position',[47.5 25 185 252]);  
65 cnames={'Tiempo','Velocidad'};  
66 uitable('Parent',f,'Data',[Sismo(:,1) Vel],'ColumnName',cnames,'RowName'↵  
    ,[],'Position',[260 25 175 252]);  
67 cnames={'Tiempo','Aceleración'};  
68 uitable('Parent',f,'Data',[Sismo(:,1) Acel],'ColumnName',cnames,'RowName'↵  
    ,[],'Position',[462.5 25 172.5 252]);
```

Resultados:

Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 7.1).

Tiempo	Desplazamiento
0	0
0.0100	1.1447e-07
0.0200	8.0632e-07
0.0300	2.4051e-06
0.0400	4.6847e-06
0.0500	7.4144e-06
0.0600	1.0799e-05
0.0700	1.5356e-05
0.0800	2.1582e-05
0.0900	2.9687e-05
0.1000	3.9318e-05
0.1100	4.9495e-05
0.1200	5.9152e-05

Tiempo	Velocidad
0	0
0.0100	2.2895e-05
0.0200	1.1547e-04
0.0300	2.0429e-04
0.0400	2.5161e-04
0.0500	2.9434e-04
0.0600	3.8262e-04
0.0700	5.2878e-04
0.0800	7.1634e-04
0.0900	9.0464e-04
0.1000	0.0010
0.1100	0.0010
0.1200	9.1784e-04

Tiempo	Aceleración
0	-0.0028
0.0100	0.0074
0.0200	0.0111
0.0300	0.0066
0.0400	0.0028
0.0500	0.0057
0.0600	0.0120
0.0700	0.0173
0.0800	0.0202
0.0900	0.0174
0.1000	0.0060
0.1100	-0.0076
0.1200	-0.0116

Figura 7.1: Historiales registrados en forma tabular.

La representación gráfica de los historiales de aceleraciones, velocidades y desplazamientos (figuras 7.2, 7.3 y 7.4 respectivamente).

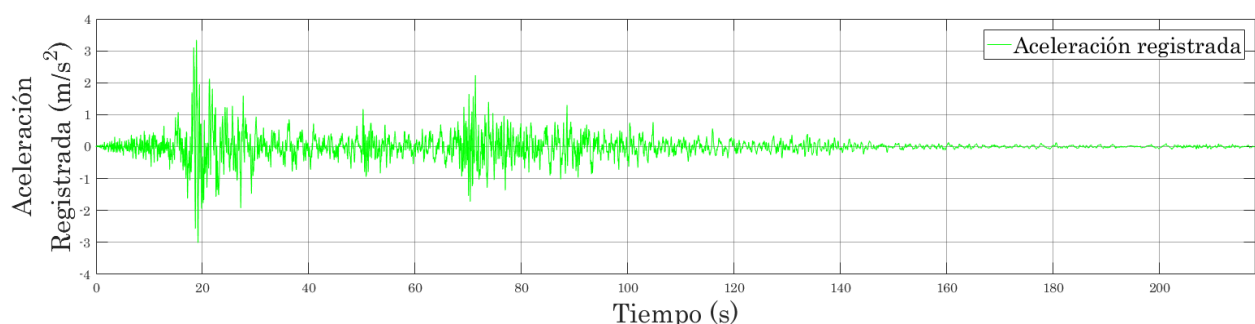


Figura 7.2: Historial de aceleraciones registradas.

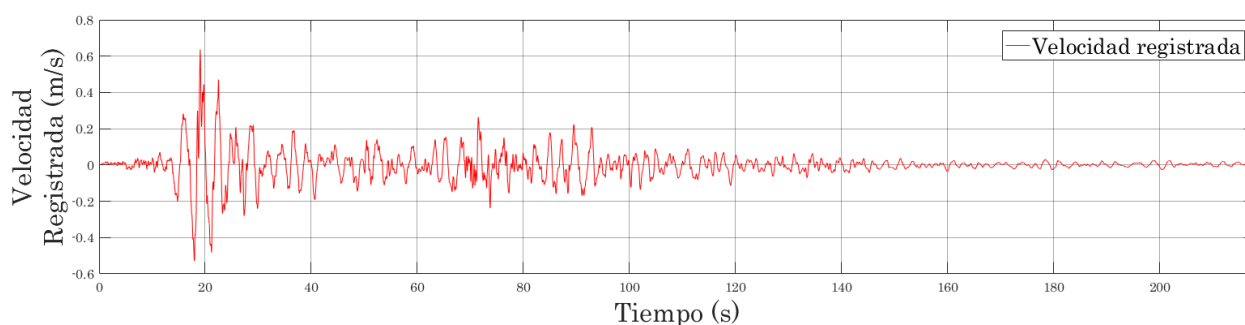
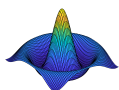


Figura 7.3: Historial de velocidades registradas.

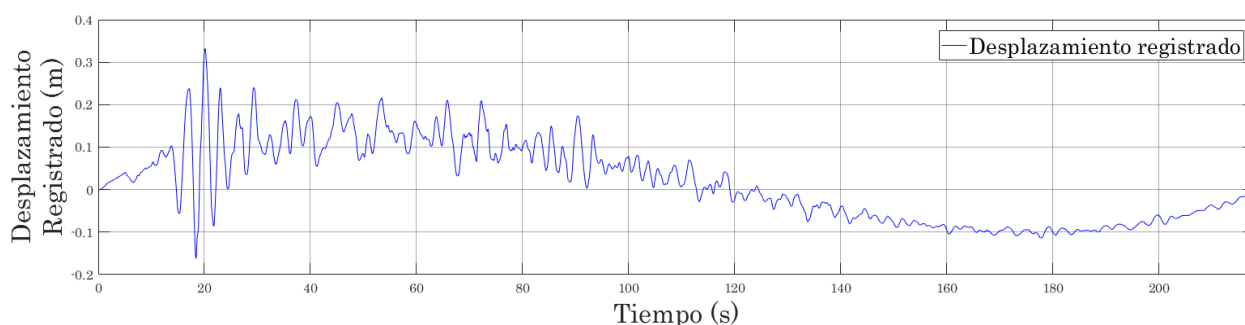


Figura 7.4: Historial de desplazamientos registrados.

7.3. Espectros de respuestas

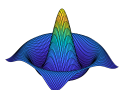
Para generar los espectros de respuesta se hará uso de la integral de Duhamel, el cual es un método numérico bastante conocido para resolver ecuaciones diferenciales lineales. Además, se van a considerar diferentes fracciones de amortiguamiento que tienen por finalidad ilustrar la relación: mayor fracción de amortiguamiento - mejor respuesta del sistema.

7.3.1. Ejemplo: Espectros de respuesta

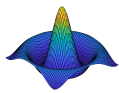
Hacer uso de la componente N-S del sismo de Pisco del 15 de agosto del 2007, previamente verificar este corregido el error de línea base del registro, para obtener los espectros de desplazamiento, de pseudo-velocidad y de pseudo-aceleración. Considerar las fracciones de amortiguamiento $\zeta = 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.1$ y 0.2 .

Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Espectros de respuesta de desplazamientos, pseudo-velocidades y
2 % pseudo-aceleraciones. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul
3 % Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención en Ingeniería
4 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Ingreso de datos
8 load('IcaNS.mat');
9 Sismo=IcaNS;
10 Tf=5; % periodo final
11 % Cálculos previos
```

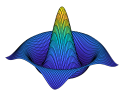


```
12 dt=Sismo(end,1)-Sismo(end-1,1);
13 t=Sismo(end,1);
14 N1=length(Sismo(:,1));
15 T1(1)=0;
16 for i=1:N1-1
17     T1(i+1)=i*dt;
18 end
19 F1=Sismo(:,2)/100;
20 % Cálculo de espectros elásticos
21 for k=1:6
22     e=[0.01 0.02 0.03 0.05 0.1 0.2];
23     s=0;
24     for P=Sismo(2,1):dt:Tf
25         s=s+1;
26         W1=2*pi/P;
27         W1D=W1*sqrt(1-e(k)^2);
28         A1(1)=0;
29         B1(1)=0;
30         Y1(1)=0;
31         for i=2:N1
32             dF1(i)=F1(i)-F1(i-1);
33             dT1(i)=T1(i)-T1(i-1);
34             C12=(exp(e(k)*W1*T1(i))*(e(k)*W1*cos(W1D*T1(i))+W1D*sin(W1D*T1(i)))↵
35                 )/((e(k)*W1)^2+W1D^2);
36             C11=(exp(e(k)*W1*T1(i-1))*(e(k)*W1*cos(W1D*T1(i-1))+W1D*sin(W1D*T1(i-1)))↵
37                 )/((e(k)*W1)^2+W1D^2);
38             CI1=(exp(e(k)*W1*T1(i))*(e(k)*W1*cos(W1D*T1(i))+W1D*sin(W1D*T1(i)))↵
39                 )/((e(k)*W1)^2+W1D^2)-C11;
40             C22=exp(e(k)*W1*T1(i))*(e(k)*W1*sin(W1D*T1(i))-W1D*cos(W1D*T1(i)))↵
41                 /((e(k)*W1)^2+W1D^2);
42             C21=exp(e(k)*W1*T1(i-1))*(e(k)*W1*sin(W1D*T1(i-1))-W1D*cos(W1D*T1(i-1)))↵
43                 /((e(k)*W1)^2+W1D^2);
44             CI2=C22-C21;
45             C32=(T1(i)-e(k)*W1/((e(k)*W1)^2+W1D^2))*C22+W1D/((e(k)*W1)^2+W1D↵
46                 ^2)*C12;
47             C31=(T1(i-1)-e(k)*W1/((e(k)*W1)^2+W1D^2))*C21+W1D/((e(k)*W1)^2+W1D↵
48                 ^2)*C11;
49             CI3=C32-C31;
50             C42=(T1(i)-e(k)*W1/((e(k)*W1)^2+W1D^2))*C12-W1D/((e(k)*W1)^2+W1D↵
51                 ^2)*C22;
52             C41=(T1(i-1)-e(k)*W1/((e(k)*W1)^2+W1D^2))*C11-W1D/((e(k)*W1)^2+W1D↵
53                 ^2)*C21;
54             CI4=C42-C41;
55             A1(i)=A1(i-1)+(F1(i-1)-T1(i-1)*dF1(i)/dT1(i))*CI1+dF1(i)/dT1(i)*↵
56                 CI4;
57             B1(i)=B1(i-1)+(F1(i-1)-T1(i-1)*dF1(i)/dT1(i))*CI2+dF1(i)/dT1(i)*↵
58                 CI3;
59             Y1(i)=exp(-e(k)*W1*T1(i))/W1D*(A1(i)*sin(W1D*T1(i))-B1(i)*cos(W1D*↵
60                 T1(i)));
61         end
62     end
63     Sd1=max(abs(Y1));
64     Sv1=W1*Sd1;
65     Sa1=W1*Sv1;
66     spec(s, :, k)=[P Sd1 Sv1 Sa1];
67 end
68 % Cálculos para puntos iniciales
```



7.3. Espectros de respuestas

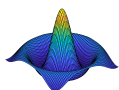
```
57 c1=zeros(1,4,6);
58 spec=[c1;spec];
59 % Trazo del registro de aceleraciones.
60 figure('Name','Registro de Aceleraciones.','NumberTitle','off','units','←
    normalized','outerposition',[0 0 1 1])
61 set(gcf,'Color','w')
62 subplot(2,1,1)
63 set(gca,'Color','w')
64 plot(Sismo(:,1),F1,'g','LineWidth',0.5),
65 grid on
66 xlim([0 Sismo(end,1)])
67 get(gca,'XTick');
68 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
69 xlabel('Tiempo (s)','FontName','Century','FontSize',24,'FontWeight','←
    normal')
70 ylabel({'Aceleración','Registrada (m/s^2)'},'FontName','Century','←
    FontSize',24,'FontWeight','normal')
71 lgd=legend('Aceleración registrada');
72 lgd.FontSize=20;
73 lgd.FontName='Century';
74 set(gca,'GridAlpha',0.40);
75 % Trazo del Espectro de Desplazamientos.
76 figure('Name','Espectro de Desplazamientos.','NumberTitle','off','units'←
    , 'normalized','outerposition',[0 0 1 1])
77 set(gcf,'Color','w');
78 set(gca,'Color','w');
79 plot(spec(:,1,1),spec(:,2,1),'b-','LineWidth',2), hold on
80 plot(spec(:,1,2),spec(:,2,2),'r-','LineWidth',2)
81 plot(spec(:,1,3),spec(:,2,3),'y-','LineWidth',2)
82 plot(spec(:,1,4),spec(:,2,4),'g-','LineWidth',2)
83 plot(spec(:,1,5),spec(:,2,5),'m-','LineWidth',2)
84 plot(spec(:,1,6),spec(:,2,6),'c-','LineWidth',2)
85 get(gca,'XTick');
86 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
87 xlabel('Periodo (segundos)','FontSize',20,'FontName','Century','←
    FontWeight','normal')
88 ylabel('Desplazamiento (Sd)','FontSize',20,'FontName','Century','←
    FontWeight','normal')
89 lgd=legend('\xi=0.01','\xi=0.02','\xi=0.03','\xi=0.05','\xi=0.1','\xi←
    =0.2','Location','northwest','Orientation','horizontal');
90 lgd.FontSize=20;
91 grid on
92 set(gca,'GridAlpha',0.40);
93 % Trazo del Espectro de Velocidades.
94 figure('Name','Espectro de Velocidades.','NumberTitle','off','units','←
    normalized','outerposition',[0 0 1 1])
95 set(gcf,'Color','w');
96 set(gca,'Color','w');
97 plot(spec(:,1,1),spec(:,3,1),'b-','LineWidth',2)
98 hold on
99 plot(spec(:,1,2),spec(:,3,2),'r-','LineWidth',2)
100 plot(spec(:,1,3),spec(:,3,3),'y-','LineWidth',2)
101 plot(spec(:,1,4),spec(:,3,4),'g-','LineWidth',2)
102 plot(spec(:,1,5),spec(:,3,5),'m-','LineWidth',2)
103 plot(spec(:,1,6),spec(:,3,6),'c-','LineWidth',2)
104 get(gca,'XTick');
105 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
```



```
106 xlabel('Periodo (segundos)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', '↵  
    FontWeight', 'normal')  
107 ylabel('Velocidad (Sv)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', 'FontWeight', '↵  
    'normal')  
108 lgd=legend('\xi=0.01', '\xi=0.02', '\xi=0.03', '\xi=0.05', '\xi=0.1', '\xi↵  
    =0.2', 'Location', 'northeast', 'Orientation', 'horizontal');  
109 lgd.FontSize=20;  
110 grid on  
111 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);  
112 % Trazo del Espectro de Aceleraciones.  
113 figure('Name', 'Espectro de Aceleraciones.', 'NumberTitle', 'off', 'units', '↵  
    normalized', 'outerposition', [0 0 1 1])  
114 set(gcf, 'Color', 'w');  
115 set(gca, 'Color', 'w');  
116 plot(spec(:,1,1), spec(:,4,1), 'b-', 'LineWidth', 2)  
117 hold on  
118 plot(spec(:,1,2), spec(:,4,2), 'r-', 'LineWidth', 2)  
119 plot(spec(:,1,3), spec(:,4,3), 'y-', 'LineWidth', 2)  
120 plot(spec(:,1,4), spec(:,4,4), 'g-', 'LineWidth', 2)  
121 plot(spec(:,1,5), spec(:,4,5), 'm-', 'LineWidth', 2)  
122 plot(spec(:,1,6), spec(:,4,6), 'c-', 'LineWidth', 2)  
123 get(gca, 'XTick');  
124 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')  
125 xlabel('Periodo (segundos)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', '↵  
    FontWeight', 'normal')  
126 ylabel('Aceleración (Sa)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century', 'FontWeight↵  
    ', 'normal')  
127 lgd=legend('\xi=0.01', '\xi=0.02', '\xi=0.03', '\xi=0.05', '\xi=0.1', '\xi↵  
    =0.2', 'Location', 'northeast', 'Orientation', 'horizontal');  
128 lgd.FontSize=20;  
129 grid on  
130 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);  
131 % Visualización numérica  
132 f = figure('Name', 'Resultados numéricos', 'NumberTitle', 'off', 'Position'↵  
    , [500 100 780 640]);  
133 set(gcf, 'Color', 'w');  
134 cnames = {'Tiempo', 'Desplazamiento', 'Velocidad', 'Aceleración'};  
135 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 1), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [50 450 335 150]);  
136 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 2), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [400 450 335 150]);  
137 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 3), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [50 250 335 150]);  
138 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 4), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [400 250 335 150]);  
139 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 5), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [50 50 335 150]);  
140 uitable('Parent', f, 'Data', spec(:, :, 6), 'ColumnName', cnames, 'RowName', [], '↵  
    Position', [400 50 335 150]);
```

Resultados:

La representación gráfica del registro de aceleraciones (figura 7.5). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 7.6) y la representación gráfica de los espectros de respuesta de desplazamiento, de pseudo-velocidad y de pseudo-aceleración (figuras 7.7, 7.8 y 7.9 respectivamente).



7.3. Espectros de respuestas

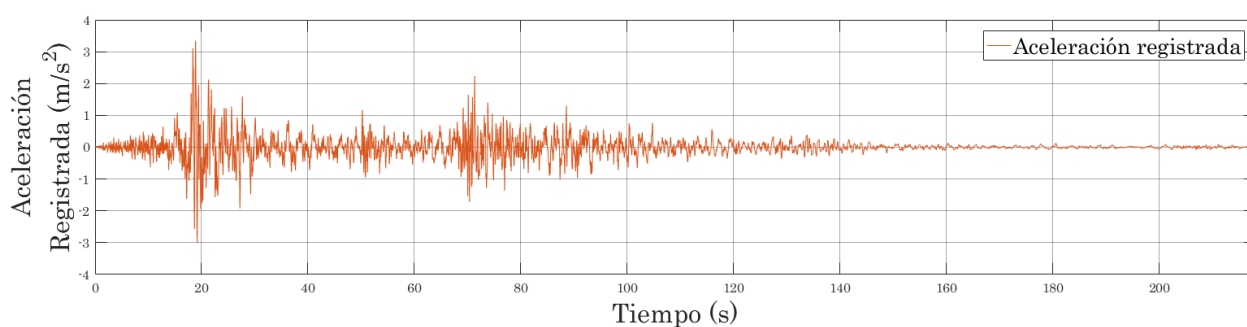


Figura 7.5: Aceleración registrada con corrección de línea base.

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	8.4617e-06	0.0053	3.3405
0.0200	3.3853e-05	0.0106	3.3412
0.0300	7.6304e-05	0.0160	3.3471
0.0400	1.5953e-04	0.0251	3.9363
0.0500	2.9315e-04	0.0368	4.6292
0.0600	4.5554e-04	0.0477	4.9956

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	8.4595e-06	0.0053	3.3397
0.0200	3.3855e-05	0.0106	3.3414
0.0300	7.6319e-05	0.0160	3.3477
0.0400	1.5269e-04	0.0240	3.7674
0.0500	2.8757e-04	0.0361	4.5411
0.0600	4.2781e-04	0.0448	4.6914

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	8.4574e-06	0.0053	3.3388
0.0200	3.3858e-05	0.0106	3.3416
0.0300	7.6336e-05	0.0160	3.3485
0.0400	1.5008e-04	0.0236	3.7030
0.0500	2.7941e-04	0.0351	4.4123
0.0600	4.0650e-04	0.0426	4.4578

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	8.4544e-06	0.0053	3.3377
0.0200	3.3862e-05	0.0106	3.3420
0.0300	7.6373e-05	0.0160	3.3501
0.0400	1.4619e-04	0.0230	3.6071
0.0500	2.6316e-04	0.0331	4.1557
0.0600	3.8067e-04	0.0399	4.1745

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	1.6002e-06	0.0010	0.6317
0.0200	3.3871e-05	0.0106	3.3430
0.0300	7.6478e-05	0.0160	3.3547
0.0400	1.4050e-04	0.0221	3.4668
0.0500	2.3278e-04	0.0293	3.6758
0.0600	3.3799e-04	0.0354	3.7064

Tiempo	Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
0	0	0	0
0.0100	7.6687e-07	4.8184e-04	0.3027
0.0200	6.3907e-06	0.0020	0.6307
0.0300	2.4654e-05	0.0052	1.0814
0.0400	1.3938e-04	0.0219	3.4390
0.0500	2.1851e-04	0.0275	3.4506
0.0600	3.0951e-04	0.0324	3.3942

Figura 7.6: Historiales de espectros de respuesta en forma tabular.

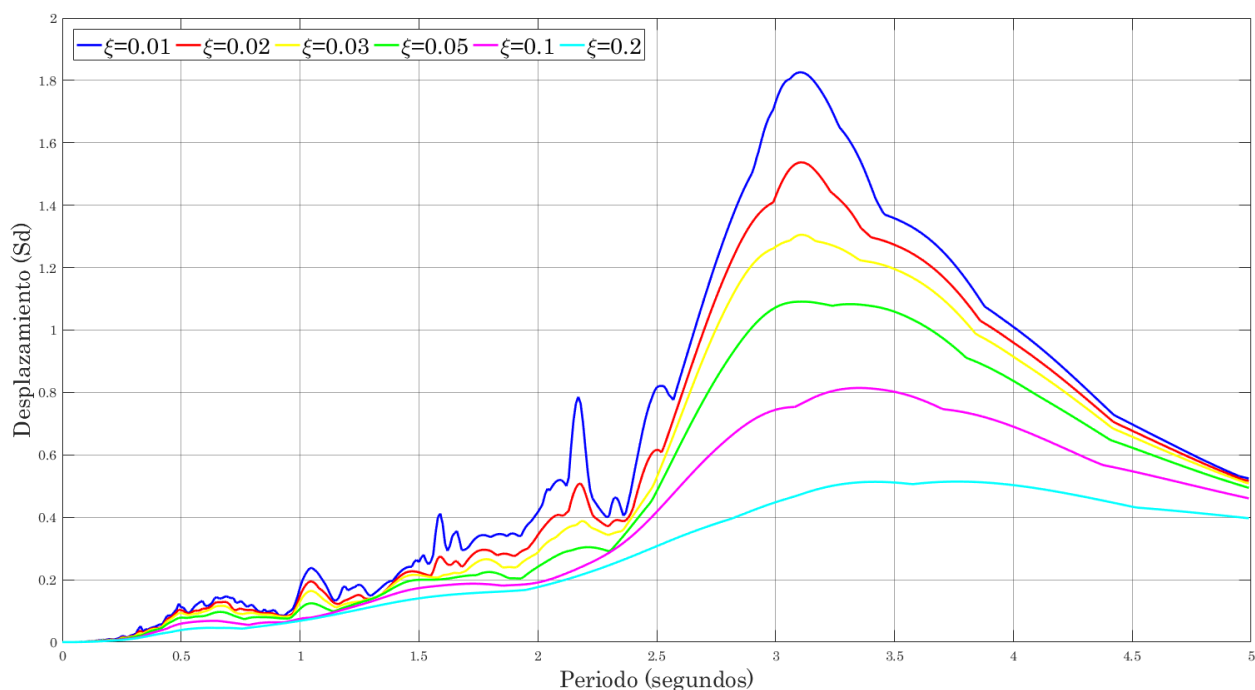
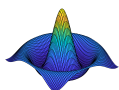


Figura 7.7: Espectros de desplazamientos.



7.3. Espectros de respuestas

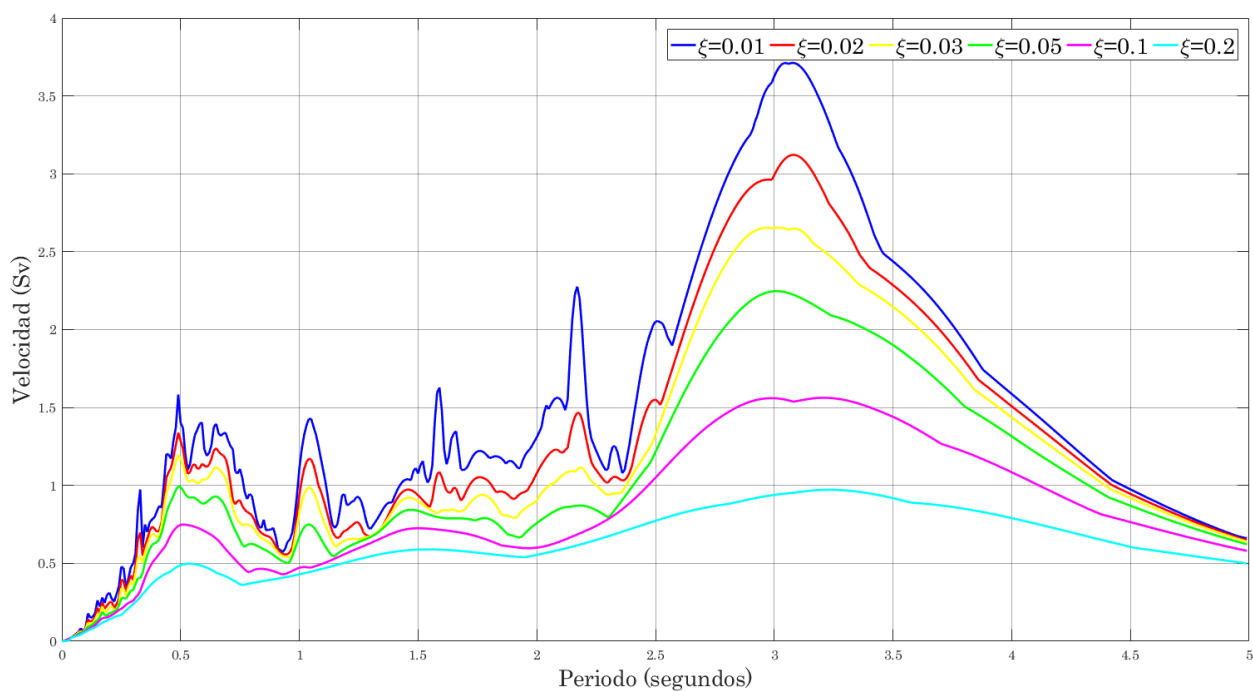


Figura 7.8: Espectros de pseudo-velocidades.

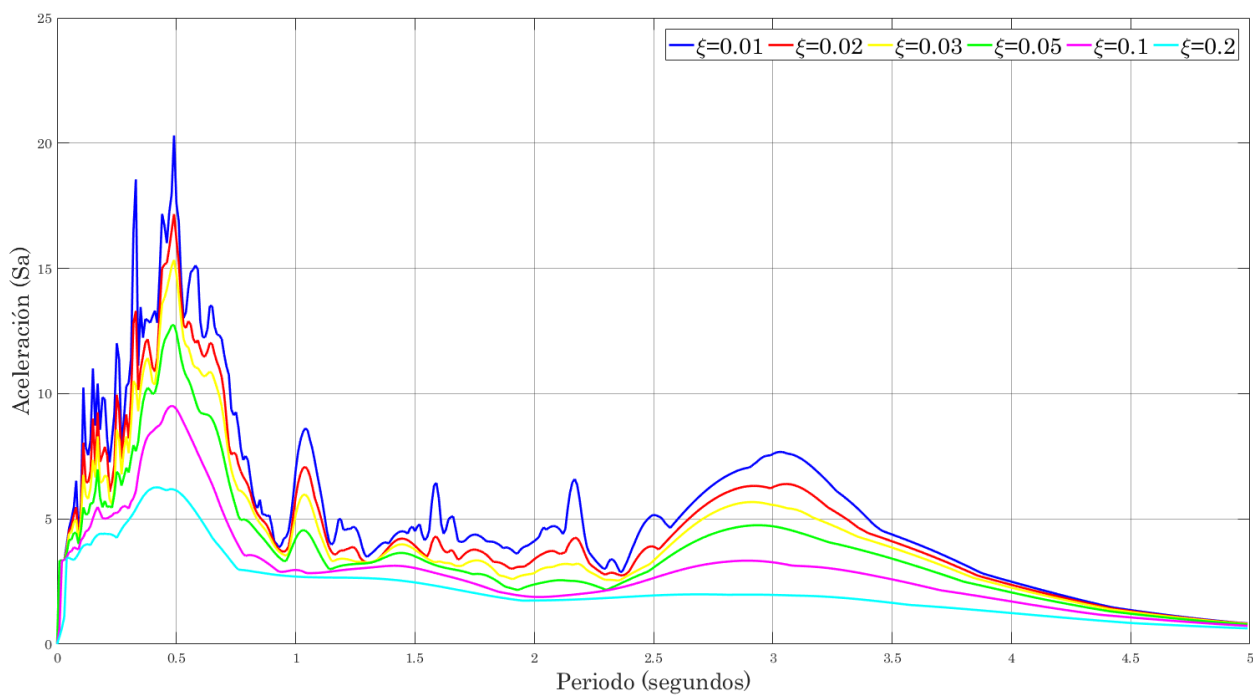
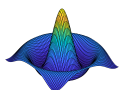


Figura 7.9: Espectros de pseudo-aceleraciones.

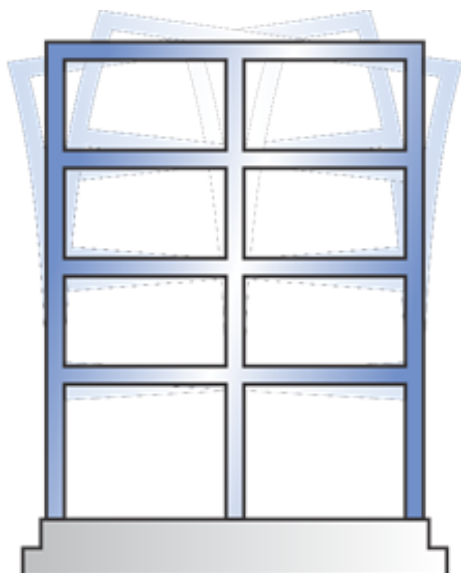


8. Análisis plano con aislamiento en la base

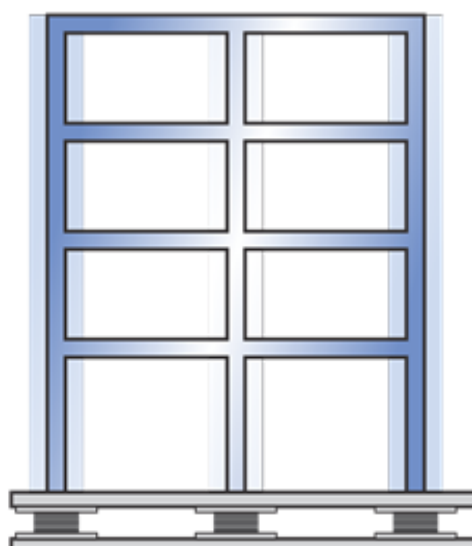
8.1. Introducción

En este capítulo se presenta la formulación matricial del análisis sísmico de pórticos bidimensionales con aislamiento en la base; además, del planteamiento matricial y desarrollo en código fuente de un pórtico representativo sometido a una aceleración en la base.

8.2. Aislamiento en edificios



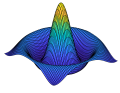
Sistema sin aislamiento



Sistema con aislamiento

Figura 8.1: Sistemas estructurales sin y con aislamiento de base.

La función de los aisladores en la base de un edificio (figura 8.1) es reducir la cantidad de energía que ingresaría debida a un sismo; aumentando el periodo fundamental del



edificio y disminuyendo los desplazamientos relativos de entrepiso. Debido a la significativa importancia de ambos factores, anteriormente mencionados, es recomendable considerar este mecanismo en el diseño de edificios.

La ecuación diferencial de equilibrio dinámico del sistema con aislamiento se muestra en la ecuación 8.1,

$$m_a \ddot{v} + c_a \dot{v} + k_a v = -m_a b \ddot{u}_G(t) \quad (8.1)$$

donde m_a , c_a y k_a son las matrices respectivas de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema con aislamiento en la base; y b (expresión 8.2) es un vector que relaciona los grados de libertad del sistema con la aceleración del suelo $\ddot{u}_G(t)$ debida al sismo.

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

La matriz de masa m_a del sistema presenta la composición mostrada en la ecuación 8.3,

$$m_a = \begin{bmatrix} m_b + \sum_{i=1}^n m_i & m I_v^T \\ m I_v & m \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

donde m_b es la masa del aislamiento, m es la matriz de masas diagonal de la estructura considerada como empotrada y I_v es un vector con términos unitarios.

La matriz de amortiguamiento c_a del sistema presenta la composición mostrada en la ecuación 8.4,

$$c_a = \begin{bmatrix} c_b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

donde c_b (expresión 8.5) es el amortiguamiento del aislamiento, c es la matriz de amortiguamiento de la estructura considerada como empotrada, ζ_b es la fracción de amortiguamiento del aislamiento y k_b es la rigidez del aislamiento.

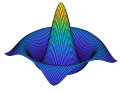
$$c_b = 2\zeta_b \sqrt{k_b \left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i \right)} \quad (8.5)$$

La matriz de rigidez k_a del sistema presenta la composición mostrada en la expresión 8.6,

$$k_a = \begin{bmatrix} k_b & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

donde k_b (expresión 8.7) es la rigidez del aislamiento, k es la matriz de rigidez de la estructura considerada como empotrada, ω_b (expresión 8.8) es la frecuencia natural obtenida del periodo provisto en el aislamiento T_b .

$$k_b = \left(\frac{2\pi}{T_b} \right)^2 \left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (8.7)$$



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{(m_b + \sum_{i=1}^n m_i)}} \quad \wedge \quad k_b = \omega_b^2 \left(m_b + \sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (8.8)$$

8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

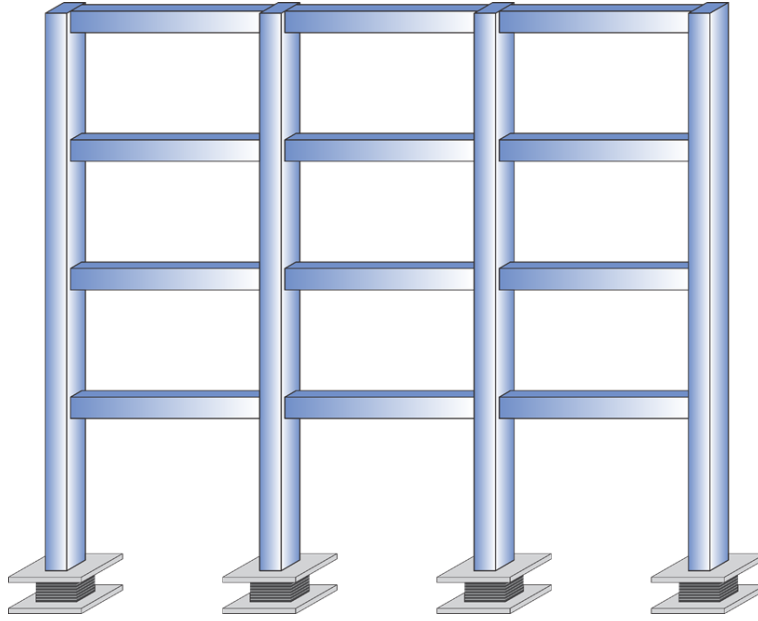


Figura 8.2: Pórtico bidimensional con aislamiento de base.

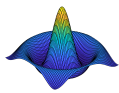
Similarmente a lo mostrado en el capítulo 1, se realiza el desarrollo propuesto por el método de reducción de orden; el cual permite pasar de una ecuación de segundo grado a un conjunto de ecuaciones de primer grado. La ecuación 8.1 gobierna el sistema, que en términos más simples se puede expresar como (ecuación 8.9):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{b}\ddot{u}_g \quad (8.9)$$

Considerando el sistema de la figura 8.2, asumiendo un modelo simplificado de viga en voladizo, habrá que asignar las variables de x_1 a x_{10} ; siendo los arreglos matriciales mostrados en las ecuaciones 8.10a y 8.10b obtenidos de las relaciones determinadas entre las derivadas de las variables asignadas (de $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_{10}$) y entre el desplazamiento, velocidad y aceleración de los cinco grados de libertad del sistema.

$$[\dot{\mathbf{x}}_{10 \times 1}] = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{I}_{5 \times 5} \\ -\mathbf{KM}^{-1}_{5 \times 5} & -\mathbf{CM}^{-1}_{5 \times 5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} [\mathbf{x}_{10 \times 1}] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{u}_g \quad (8.10a)$$

$$[\mathbf{y}_{15 \times 1}] = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{5 \times 1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{5 \times 1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{5 \times 1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{5 \times 5} & \mathbf{0}_{5 \times 5} \\ \mathbf{0}_{5 \times 5} & \mathbf{I}_{5 \times 5} \\ -\mathbf{KM}^{-1}_{5 \times 5} & -\mathbf{CM}^{-1}_{5 \times 5} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} [\mathbf{x}_{15 \times 1}] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{5 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{1 \times 1} \\ \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \ddot{u}_g \quad (8.10b)$$



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

Una manera compacta de representar los arreglos matriciales anteriores se da en las ecuaciones 8.11a y 8.11b.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}}_g \quad (8.11a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{u}}_g \quad (8.11b)$$

8.3.1. Ejemplo: Pórtico con aislamiento en la base (4 pisos)

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 8.2; donde la matriz de masas, rigidez y amortiguamiento corresponden a las expresiones 8.12a, 8.12b y 8.12c, respectivamente; las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m, dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 m × 0.50 m en columnas y 0.30 m × 0.50 m en vigas; el módulo de elasticidad considerado es $E = 21316773.9449 \text{ KN/m}^2$; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.

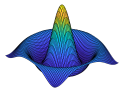
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 245.20 & 59.55 & 52.35 & 52.35 & 50.48 \\ 59.55 & 59.55 & 0 & 0 & 0 \\ 52.35 & 0 & 52.35 & 0 & 0 \\ 52.35 & 0 & 0 & 52.35 & 0 \\ 50.48 & 0 & 0 & 0 & 50.48 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m} \quad (8.12a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 154.0637 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 563.2245 & -401.9348 & 115.2795 & -16.5785 \\ 0 & -401.9348 & 693.6349 & -421.6172 & 93.0589 \\ 0 & 115.2795 & -421.6172 & 634.7972 & -274.0090 \\ 0 & -16.5785 & 93.0589 & -274.0090 & 234.2197 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m} \quad (8.12b)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2420 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 221640 & -172150 & 49374 & -7101 \\ 0 & -172150 & 279870 & -180580 & 39857 \\ 0 & 49374 & -180580 & 254670 & -117360 \\ 0 & -7101 & 39857 & -117360 & 83714 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (8.12c)$$

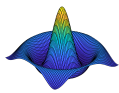
Solución: La secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis tiempo historia con aislamiento. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán
2 % Prado e Ing. Raul Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con
3 % Mención en Ingeniería Estructural de la Universidad Nacional de
4 % Ingeniería.
5 % Funciones de limpieza
6 clc, clear all, close all
7 % Matriz de masa, amortiguamiento y rigidez.
8 M=[245.20 59.55 52.35 52.35 50.48; 59.55 59.55 0 0 0; 52.35 0 52.35 0 0;↵
   52.35 0 0 52.35 0; 50.48 0 0 0 50.48];
9 K=[2420.02699914711 0 0 0 0; 0 221643.528387679 -172147.651551681 ↵
   49373.9116128413 -7100.52477765100; 0 -172147.651551681 ↵
   279865.804799541 -180577.544143438 39856.8766838270; 0 ↵
```



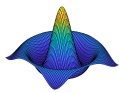
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
49373.9116128413 -180577.544143438 254665.788446643 ↵
-117357.358652674; 0 -7100.52477765100 39856.8766838270 ↵
-117357.358652674 83714.4329317485];
10 C=[154.063703732043 0 0 0 0; 0 563.224519509067 -401.934824949531 ↵
115.279496073888 -16.5784903705071; 0 -401.934824949531 ↵
693.634892828598 -421.617157950710 93.0588748005062; 0 ↵
115.279496073888 -421.617157950710 634.797237651603 ↵
-274.009020636804; 0 -16.5784903705071 93.0588748005062 ↵
-274.009020636804 234.219677526940];
11 calc1=size(M);
12 ndgl=calc1(1);
13 % Cálculo de la matriz A
14 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
15 % Cálculo de la matriz B
16 B=[zeros(ndgl,1); -1; zeros(ndgl-1,1)];
17 % Cálculo de la matriz C
18 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\C];
19 % Cálculo de la matriz D
20 D=[zeros(ndgl,1); zeros(ndgl,1); -1; zeros(ndgl-1,1)];
21 % Componente de la aceleración del suelo registrada
22 load Ica.txt
23 t=Ica(:,1);
24 u=Ica(:,3)/100;
25 % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales
26 x0=[0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00 0.00];
27 sys=ss(A,B,C,D);
28 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);
29 % Visualización numérica de los resultados.
30 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y ↵
aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 865 300]);
31 set(gcf,'Color','w');
32 cnames = {'t','x1','x2','x3','x4','x5','v1','v2','v3','v4','v5','a1','a2'↵
', 'a3','a4','a5'};
33 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:, :)], 'ColumnName',cnames, 'RowName',[], '↵
Position',[50 25 770 255]);
34 % Registro de aceleración del suelo
35 figure('Name','Registro de aceleraciones del suelo','NumberTitle','off',↵
'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
36 subplot(2,1,1)
37 set(gcf,'Color','w');
38 set(gca,'Color','w');
39 plot(t,u,'Color',[0.87 0.49 0], 'LineWidth',0.5)
40 xlim([0 t(end,1)])
41 get(gca, 'XTick');
42 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName','Century')
43 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo','FontSize',24, 'FontName'↵
', 'Century', 'FontWeight', 'bold')
44 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20, 'FontName','Century')
45 ylabel('Aceleración del suelo (m/s^2)','FontSize',20, 'FontName','Century'↵
')
46 grid on
47 lgd=legend('Sismo de Pisco');
48 lgd.FontSize=20;
49 lgd.FontName='Century';
50 ax=gca;
51 ax.GridAlpha=0.40;
52 % Historiales de desplazamientos
```



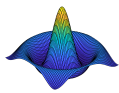
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
53 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Desplazamientos','NumberTitle','off','↵
    units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
54 subplot(2,2,1)
55 set(gcf,'Color','w');
56 set(gca,'Color','w');
57 plot(t,y(:,1),'Color','b','LineWidth',0.5)
58 xlim([0 t(end,1)])
59 get(gca,'XTick');
60 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
61 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','↵
    Century','FontWeight','bold')
62 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
63 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
64 grid on
65 lgd=legend('Base de la estructura');
66 lgd.FontSize=20;
67 lgd.FontName='Century';
68 ax=gca;
69 ax.GridAlpha=0.40;
70 subplot(2,2,2)
71 set(gcf,'Color','w');
72 set(gca,'Color','w');
73 plot(t,y(:,2),'Color','b','LineWidth',0.5)
74 xlim([0 t(end,1)])
75 get(gca,'XTick');
76 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
77 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','↵
    Century','FontWeight','bold')
78 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
79 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
80 grid on
81 lgd=legend('Primer piso');
82 lgd.FontSize=20;
83 lgd.FontName='Century';
84 ax=gca;
85 ax.GridAlpha=0.40;
86 subplot(2,2,3)
87 set(gcf,'Color','w');
88 set(gca,'Color','w');
89 plot(t,y(:,3),'Color','b','LineWidth',0.5)
90 xlim([0 t(end,1)])
91 get(gca,'XTick');
92 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
93 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','↵
    Century','FontWeight','bold')
94 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
95 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
96 grid on
97 lgd=legend('Segundo piso');
98 lgd.FontSize=20;
99 lgd.FontName='Century';
100 ax=gca;
101 ax.GridAlpha=0.40;
102 subplot(2,2,4)
103 set(gcf,'Color','w');
104 set(gca,'Color','w');
105 plot(t,y(:,4),'Color','b','LineWidth',0.5)
```



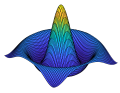
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
106 xlim([0 t(end,1)])
107 get(gca, 'XTick');
108 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
109 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
110 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
111 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
112 grid on
113 lgd=legend('Tercer piso');
114 lgd.FontSize=20;
115 lgd.FontName='Century';
116 ax=gca;
117 ax.GridAlpha=0.40;
118 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Desplazamientos', 'NumberTitle', 'off', '←
    units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
119 subplot(2,2,1)
120 set(gcf, 'Color', 'w');
121 set(gca, 'Color', 'w');
122 plot(t,y(:,5), 'Color', 'b', 'LineWidth', 0.5)
123 xlim([0 t(end,1)])
124 get(gca, 'XTick');
125 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
126 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
127 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
128 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
129 grid on
130 lgd=legend('Cuarto piso');
131 lgd.FontSize=20;
132 lgd.FontName='Century';
133 ax=gca;
134 ax.GridAlpha=0.40;
135 % Historiales de Velocidades
136 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Velocidades', 'NumberTitle', 'off', 'units←
    ', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
137 subplot(2,2,1)
138 set(gcf, 'Color', 'w');
139 set(gca, 'Color', 'w');
140 plot(t,y(:,6), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
141 xlim([0 t(end,1)])
142 get(gca, 'XTick');
143 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
144 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
145 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
146 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
147 grid on
148 lgd=legend('Base de la estructura');
149 lgd.FontSize=20;
150 lgd.FontName='Century';
151 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
152 subplot(2,2,2)
153 set(gcf, 'Color', 'w');
154 set(gca, 'Color', 'w');
155 plot(t,y(:,7), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
156 xlim([0 t(end,1)])
157 get(gca, 'XTick');
```



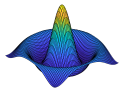
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
158 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
159 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
160 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
161 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
162 grid on
163 lgd=legend('Primer piso');
164 lgd.FontSize=20;
165 lgd.FontName='Century';
166 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
167 subplot(2,2,3)
168 set(gcf, 'Color', 'w');
169 set(gca, 'Color', 'w');
170 plot(t,y(:,8), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
171 xlim([0 t(end,1)])
172 get(gca, 'XTick');
173 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
174 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
175 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
176 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
177 grid on
178 lgd=legend('Segundo piso');
179 lgd.FontSize=20;
180 lgd.FontName='Century';
181 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
182 subplot(2,2,4)
183 set(gcf, 'Color', 'w');
184 set(gca, 'Color', 'w');
185 plot(t,y(:,9), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
186 xlim([0 t(end,1)])
187 get(gca, 'XTick');
188 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
189 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
190 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
191 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
192 grid on
193 lgd=legend('Tercer piso');
194 lgd.FontSize=20;
195 lgd.FontName='Century';
196 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
197 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Velocidades', 'NumberTitle', 'off', 'units←
    ', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
198 subplot(2,2,1)
199 set(gcf, 'Color', 'w');
200 set(gca, 'Color', 'w');
201 plot(t,y(:,10), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
202 xlim([0 t(end,1)])
203 get(gca, 'XTick');
204 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
205 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
206 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
207 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
208 grid on
209 lgd=legend('Cuarto piso');
```



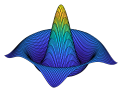
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
210 lgd.FontSize=20;
211 lgd.FontName='Century';
212 set(gca,'GridAlpha',0.40)
213 % Historiales de Aceleraciones
214 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Aceleraciones','NumberTitle','off','←
    units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
215 subplot(2,2,1)
216 set(gcf,'Color','w');
217 set(gca,'Color','w');
218 plot(t,y(:,11),'Color','g','LineWidth',0.5)
219 xlim([0 t(end,1)])
220 get(gca,'XTick');
221 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
222 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
223 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
224 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
225 grid on
226 lgd=legend('Base de la estructura');
227 lgd.FontSize=20;
228 lgd.FontName='Century';
229 set(gca,'GridAlpha',0.40)
230 subplot(2,2,2)
231 set(gcf,'Color','w');
232 set(gca,'Color','w');
233 plot(t,y(:,12),'Color','g','LineWidth',0.5)
234 xlim([0 t(end,1)])
235 get(gca,'XTick');
236 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
237 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
238 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
239 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
240 grid on
241 lgd=legend('Primer piso');
242 lgd.FontSize=20;
243 lgd.FontName='Century';
244 set(gca,'GridAlpha',0.40)
245 subplot(2,2,3)
246 set(gcf,'Color','w');
247 set(gca,'Color','w');
248 plot(t,y(:,13),'Color','g','LineWidth',0.5)
249 xlim([0 t(end,1)])
250 get(gca,'XTick');
251 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
252 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
253 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
254 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
255 grid on
256 lgd=legend('Segundo piso');
257 lgd.FontSize=20;
258 lgd.FontName='Century';
259 set(gca,'GridAlpha',0.40)
260 subplot(2,2,4)
261 plot(t,y(:,14),'Color','g','LineWidth',0.5)
262 xlim([0 t(end,1)])
```



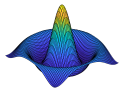
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
263 get(gca, 'XTick');
264 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
265 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century' ←
      , 'FontWeight', 'bold')
266 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
267 ylabel('Aceleración (m/s^2)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
268 grid on
269 lgd=legend('Tercer piso');
270 lgd.FontSize=20;
271 lgd.FontName='Century';
272 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
273 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Aceleraciones', 'NumberTitle', 'off', '←
      units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
274 subplot(2,2,1)
275 set(gcf, 'Color', 'w');
276 set(gca, 'Color', 'w');
277 plot(t, y(:,15), 'Color', 'g', 'LineWidth', 0.5)
278 xlim([0 t(end,1)])
279 get(gca, 'XTick');
280 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
281 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century' ←
      , 'FontWeight', 'bold')
282 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
283 ylabel('Aceleración (m/s^2)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
284 grid on
285 lgd=legend('Cuarto piso');
286 lgd.FontSize=20;
287 lgd.FontName='Century';
288 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
289 % Relaciones de derivas de entrepiso
290 hor(5)=max(abs([min(y(:,5)-y(:,4)) max(y(:,5)-y(:,4))]))/3;
291 hor(4)=max(abs([min(y(:,4)-y(:,3)) max(y(:,4)-y(:,3))]))/3;
292 hor(3)=max(abs([min(y(:,3)-y(:,2)) max(y(:,3)-y(:,2))]))/3;
293 hor(2)=max(abs([min(y(:,2)) max(y(:,2))]))/4;
294 hor(1)=0;
295 figure('Name', 'Relaciones de derivas de entrepiso', 'NumberTitle', 'off', '←
      Position', [625 100 575 750])
296 set(gcf, 'Color', 'w')
297 set(gcf, 'Color', 'w')
298 x=hor;
299 st=0:1:4;
300 yy=0:0.001:max(st);
301 xx=interp1(st, x, yy, 'pchip');
302 plot(xx, yy, 'r', 'LineWidth', 2)
303 title('Derivas de entrepiso', 'FontName', 'Century', 'FontSize', 20)
304 xlabel('Deriva de entrepiso', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
305 ylabel('Número de piso', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
306 hold on
307 grid on
308 set(gca, 'GridAlpha', 0.40)
309 % Visualización interactiva del historial de desplazamientos
310 figure('Name', 'Visualización interactiva de desplazamientos', '←
      NumberTitle', 'off', 'units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
311 set(gcf, 'Color', 'w')
312 set(gca, 'Color', 'w', 'Visible', 'off')
313 axis tight
314 x1=25*y(:,1);
```



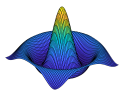
8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
315 x2=25*y(:,2);
316 x3=25*y(:,3);
317 x4=25*y(:,4);
318 x5=25*y(:,5);
319 for k=1:length(x1)
320     y1=0*ones(1,length(x1));
321     y2=4*ones(1,length(x2));
322     y3=7*ones(1,length(x3));
323     y4=10*ones(1,length(x3));
324     y5=13*ones(1,length(x3));
325     plot3([x1(k)+x2(k) x1(k)+5+x2(k) x1(k)+10+x2(k) x1(k)+15+x2(k)], [0 0 0 ←
        0], [y2(k) y2(k) y2(k) y2(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 5)
326     hold on
327     plot3([x1(k)+x3(k) x1(k)+5+x3(k) x1(k)+10+x3(k) x1(k)+15+x3(k)], [0 0 0 ←
        0], [y3(k) y3(k) y3(k) y3(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 5)
328     plot3([x1(k)+x4(k) x1(k)+5+x4(k) x1(k)+10+x4(k) x1(k)+15+x4(k)], [0 0 0 ←
        0], [y4(k) y4(k) y4(k) y4(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 5)
329     plot3([x1(k)+x5(k) x1(k)+5+x5(k) x1(k)+10+x5(k) x1(k)+15+x5(k)], [0 0 0 ←
        0], [y5(k) y5(k) y5(k) y5(k)], 'Color', 'r', 'LineWidth', 5)
330     set(gca, 'Color', 'w', 'Visible', 'off')
331     plot3([x1(k) x1(k)+x2(k)], [0 0], [0 y2(k)], [5+x1(k) 5+x1(k)+x2(k)], [0 ←
        0], [0 y2(k)], [10+x1(k) 10+x1(k)+x2(k)], [0 0], [0 y2(k)], [15+x1(k) ←
        15+x1(k)+x2(k)], [0 0], [0 y2(k)], 'Color', 'b', 'LineWidth', 5)
332     plot3([x1(k)+x2(k) x1(k)+x3(k)], [0 0], [y2(k) y3(k)], [5+x1(k)+x2(k) 5+←
        x1(k)+x3(k)], [0 0], [y2(k) y3(k)], [10+x1(k)+x2(k) 10+x1(k)+x3(k)], [0 ←
        0], [y2(k) y3(k)], [15+x1(k)+x2(k) 15+x1(k)+x3(k)], [0 0], [y2(k) y3(k) ←
        )], 'Color', 'b', 'LineWidth', 5)
333     plot3([x1(k)+x3(k) x1(k)+x4(k)], [0 0], [y3(k) y4(k)], [5+x1(k)+x3(k) 5+←
        x1(k)+x4(k)], [0 0], [y3(k) y4(k)], [10+x1(k)+x3(k) 10+x1(k)+x4(k)], [0 ←
        0], [y3(k) y4(k)], [15+x1(k)+x3(k) 15+x1(k)+x4(k)], [0 0], [y3(k) y4(k) ←
        )], 'Color', 'b', 'LineWidth', 5)
334     plot3([x1(k)+x4(k) x1(k)+x5(k)], [0 0], [y4(k) y5(k)], [5+x1(k)+x4(k) 5+←
        x1(k)+x5(k)], [0 0], [y4(k) y5(k)], [10+x1(k)+x4(k) 10+x1(k)+x5(k)], [0 ←
        0], [y4(k) y5(k)], [15+x1(k)+x4(k) 15+x1(k)+x5(k)], [0 0], [y4(k) y5(k) ←
        )], 'Color', 'b', 'LineWidth', 5)
335     fill3([-0.75+x1(k) -0.75+x1(k) 0.75+x1(k) 0.75+x1(k)], [-0.75 0.75 0.75 ←
        -0.75], [0 0 0 0], [0.7 0.7 0.7])
336     fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [-0.4 -0.4 -0.4 ←
        -0.4], [0.7 0.7 0.7])
337     fill3([-0.75 0.75 0.75+x1(k) -0.75+x1(k)], [-0.75 -0.75 -0.75 ←
        -0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
338     fill3([-0.75 0.75 0.75+x1(k) -0.75+x1(k)], [0.75 0.75 0.75 0.75], [-0.4 ←
        -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
339     fill3([-0.75 -0.75 -0.75+x1(k) -0.75+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 ←
        0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
340     fill3([0.75 0.75 0.75+x1(k) 0.75+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 0.75], [-0.4 ←
        -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
341     fill3([4.25+x1(k) 4.25+x1(k) 5.75+x1(k) 5.75+x1(k)], [-0.75 0.75 0.75 ←
        -0.75], [0 0 0 0], [0.7 0.7 0.7])
342     fill3([4.25 4.25 5.75 5.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [-0.4 -0.4 -0.4 ←
        -0.4], [0.7 0.7 0.7])
343     fill3([4.25 5.75 5.75+x1(k) 4.25+x1(k)], [-0.75 -0.75 -0.75 ←
        -0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
344     fill3([4.25 5.75 5.75+x1(k) 4.25+x1(k)], [0.75 0.75 0.75 0.75], [-0.4 ←
        -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
345     fill3([4.25 4.25 4.25+x1(k) 4.25+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 0.75], [-0.4 ←
        -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])
```



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
346 fill3([5.75 5.75 5.75+x1(k) 5.75+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 0.75], [-0.4 ↵  
    -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
347 fill3([9.25+x1(k) 9.25+x1(k) 10.75+x1(k) 10.75+x1(k)], [-0.75 0.75 0.75 ↵  
    -0.75], [0 0 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
348 fill3([9.25 9.25 10.75 10.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [-0.4 -0.4 -0.4 ↵  
    -0.4], [0.7 0.7 0.7])  
349 fill3([9.25 10.75 10.75+x1(k) 9.25+x1(k)], [-0.75 -0.75 -0.75 ↵  
    -0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
350 fill3([9.25 10.75 10.75+x1(k) 9.25+x1(k)], [0.75 0.75 0.75 0.75], [-0.4 ↵  
    -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
351 fill3([9.25 9.25 9.25+x1(k) 9.25+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 0.75], [-0.4 ↵  
    -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
352 fill3([10.75 10.75 10.75+x1(k) 10.75+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 ↵  
    0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
353 fill3([14.25+x1(k) 14.25+x1(k) 15.75+x1(k) 15.75+x1(k)], [-0.75 0.75 ↵  
    0.75 -0.75], [0 0 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
354 fill3([14.25 14.25 15.75 15.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [-0.4 -0.4 ↵  
    -0.4 -0.4], [0.7 0.7 0.7])  
355 fill3([14.25 15.75 15.75+x1(k) 14.25+x1(k)], [-0.75 -0.75 -0.75 ↵  
    -0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
356 fill3([14.25 15.75 15.75+x1(k) 14.25+x1(k)], [0.75 0.75 0.75 ↵  
    0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
357 fill3([14.25 14.25 14.25+x1(k) 14.25+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 ↵  
    0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
358 fill3([15.75 15.75 15.75+x1(k) 15.75+x1(k)], [0.75 -0.75 -0.75 ↵  
    0.75], [-0.4 -0.4 0 0], [0.7 0.7 0.7])  
359 fill3([-1.2 -1.2 1.2 1.2], [-1.2 1.2 1.2 -1.2], [-0.4 -0.4 -0.4 -0.4], 'g' ↵  
    ')  
360 fill3([3.8 3.8 6.2 6.2], [-1.2 1.2 1.2 -1.2], [-0.4 -0.4 -0.4 -0.4], 'g')  
361 fill3([8.8 8.8 11.2 11.2], [-1.2 1.2 1.2 -1.2], [-0.4 -0.4 -0.4 -0.4], 'g' ↵  
    ')  
362 fill3([13.8 13.8 16.2 16.2], [-1.2 1.2 1.2 -1.2], [-0.4 -0.4 -0.4 -0.4], ↵  
    'g')  
363 view(-30,15)  
364 axis equal  
365 axis([-5.5 20.5 -1.25 1.25 -0.55 13.05])  
366 drawnow  
367 pause(0.0125)  
368 hold off  
369 end  
370 % Cálculo para cortante máximo  
371 fc=K(2:end,2:end)*[y(:,2)'; y(:,3)'; y(:,4)'; y(:,5)'];  
372 calc1=length(y(:,2));  
373 for i=1:calc1  
374     calc2(i)=sum(fc(:,i));  
375 end  
376 if abs(min((calc2)))>abs(max((calc2)))  
377     [a,ub]=min(calc2);  
378 else  
379     [a,ub]=max(calc2);  
380 end  
381 de(1)=y(ub,2);  
382 de(2)=y(ub,3);  
383 de(3)=y(ub,4);  
384 de(4)=y(ub,5);  
385 f=K(2:end,2:end)*abs(de)';  
386 f(1)=sum(f);
```

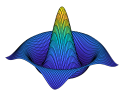


8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

```
387 for i=1:2
388     f(i+1)=sum(f(i+1:end,1));
389 end
390 % Fuerzas Cortantes
391 figure('Name','Fuerzas Cortantes','NumberTitle','off','Position',[625 ←
    100 575 750])
392 set(gca,'Color','w')
393 set(gcf,'Color','w')
394 fill([0 f(1) f(1) f(2) f(2) f(3) f(3) f(4) f(4) 0],[0 0 1 1 2 2 3 3 4 ←
    4],'b')
395 alpha(0.4)
396 title('Fuerza Cortante','FontName','Century','FontSize',20)
397 xlabel('Fuerza Cortante (kN)','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
398 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
399 hleg=legend('Fuerza Cortante','Location','NorthEast');
400 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
401 hold on
402 grid on
403 set(gca,'GridAlpha',0.40)
404 % Momentos flexionantes
405 figure('Name','Momentos flexionantes','NumberTitle','off','Position'←
    ,[625 100 575 750])
406 set(gca,'Color','w')
407 set(gcf,'Color','w')
408 m(4)=f(4)*3;
409 m(3)=m(4)+f(3)*3;
410 m(2)=m(3)+f(2)*3;
411 m(1)=m(2)+f(1)*4;
412 fill([0 m(1) m(2) m(3) m(4) 0],[0 0 1 2 3 4],'r')
413 alpha(0.4)
414 title('Momento flexionante','FontName','Century','FontSize',20)
415 xlabel('Momento flexionante (kN-m)','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
416 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
417 hleg=legend('Momento Flexionante','Location','NorthEast');
418 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
419 hold on
420 grid on
421 set(gca,'GridAlpha',0.40)
```

Resultados:

Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el pórtico en tiempo real (figura 8.3). La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 8.4). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos, velocidades y aceleraciones (figura 8.5). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 8.6). La representación gráfica de los historiales de aceleraciones (figura 8.7). La representación gráfica de distorsiones de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes (figura 8.8).



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

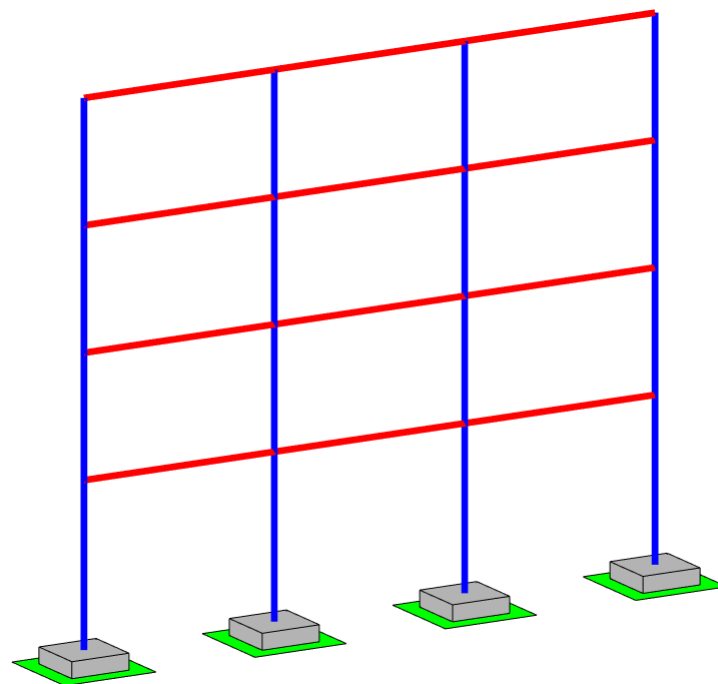


Figura 8.3: Modelo de pórtico con aislamiento.

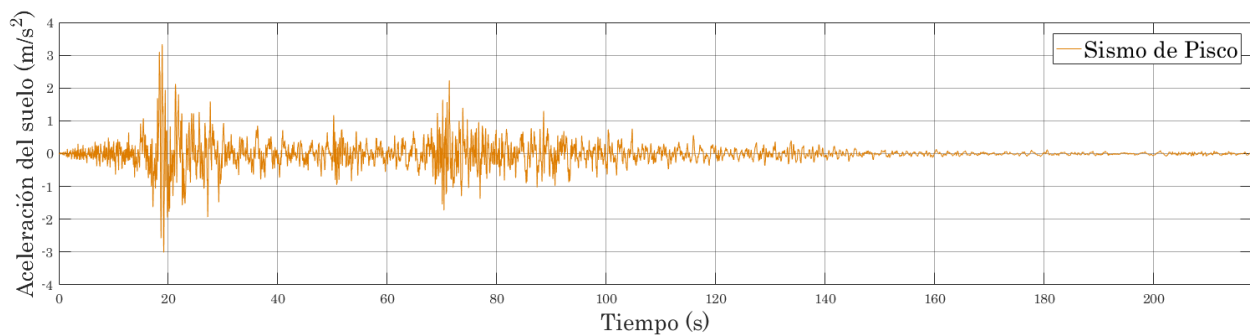
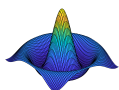


Figura 8.4: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

t	x1	x2	x3	x4	x5	v1	v2	v3	v4
0	-6.6379e-25	3.8426e-26	7.6109e-26	-7.9703e-26	-1.6076e-26	-4.3787e-22	3.4668e-23	1.1994e-23	3.3514e-23
0.0100	1.8037e-07	3.6982e-09	3.7946e-09	3.7640e-09	3.7685e-09	1.8959e-05	8.8014e-07	9.1889e-07	9.0692e-07
0.0200	1.5126e-07	1.2789e-08	1.4108e-08	1.3757e-08	1.3783e-08	-3.0604e-05	4.7633e-07	6.9754e-07	6.4812e-07
0.0300	-4.0929e-07	3.6575e-09	7.6395e-09	7.0125e-09	6.8836e-09	-7.3634e-05	-2.5957e-06	-2.3657e-06	-2.3353e-06
0.0400	-1.1808e-06	-3.9517e-08	-3.6140e-08	-3.5106e-08	-3.5861e-08	-7.4463e-05	-5.8168e-06	-6.3198e-06	-5.9918e-06
0.0500	-1.8874e-06	-1.0586e-07	-1.1464e-07	-1.0888e-07	-1.1006e-07	-7.1801e-05	-7.1650e-06	-9.1871e-06	-8.6236e-06
0.0600	-2.7687e-06	-1.8091e-07	-2.1872e-07	-2.0827e-07	-2.0748e-07	-1.1463e-04	-8.0127e-06	-1.1786e-05	-1.1530e-05
0.0700	-4.3631e-06	-2.7459e-07	-3.5836e-07	-3.4976e-07	-3.4260e-07	-2.1242e-04	-1.1348e-05	-1.6760e-05	-1.7476e-05
0.0800	-7.1378e-06	-4.2229e-07	-5.6958e-07	-5.7431e-07	-5.5739e-07	-3.4651e-04	-1.8918e-05	-2.6362e-05	-2.8305e-05
0.0900	-1.1278e-05	-6.6491e-07	-9.0258e-07	-9.3210e-07	-9.0677e-07	-4.7613e-04	-2.9941e-05	-4.0912e-05	-4.3885e-05
0.1000	-1.6415e-05	-1.0199e-06	-1.3942e-06	-1.4584e-06	-1.4316e-06	-5.3231e-04	-4.0477e-05	-5.7201e-05	-6.1222e-05
0.1100	-2.1520e-05	-1.4520e-06	-2.0296e-06	-2.1431e-06	-2.1246e-06	-4.6733e-04	-4.4337e-05	-6.8374e-05	-7.4535e-05

Figura 8.5: Historiales de respuesta en forma tabular.



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

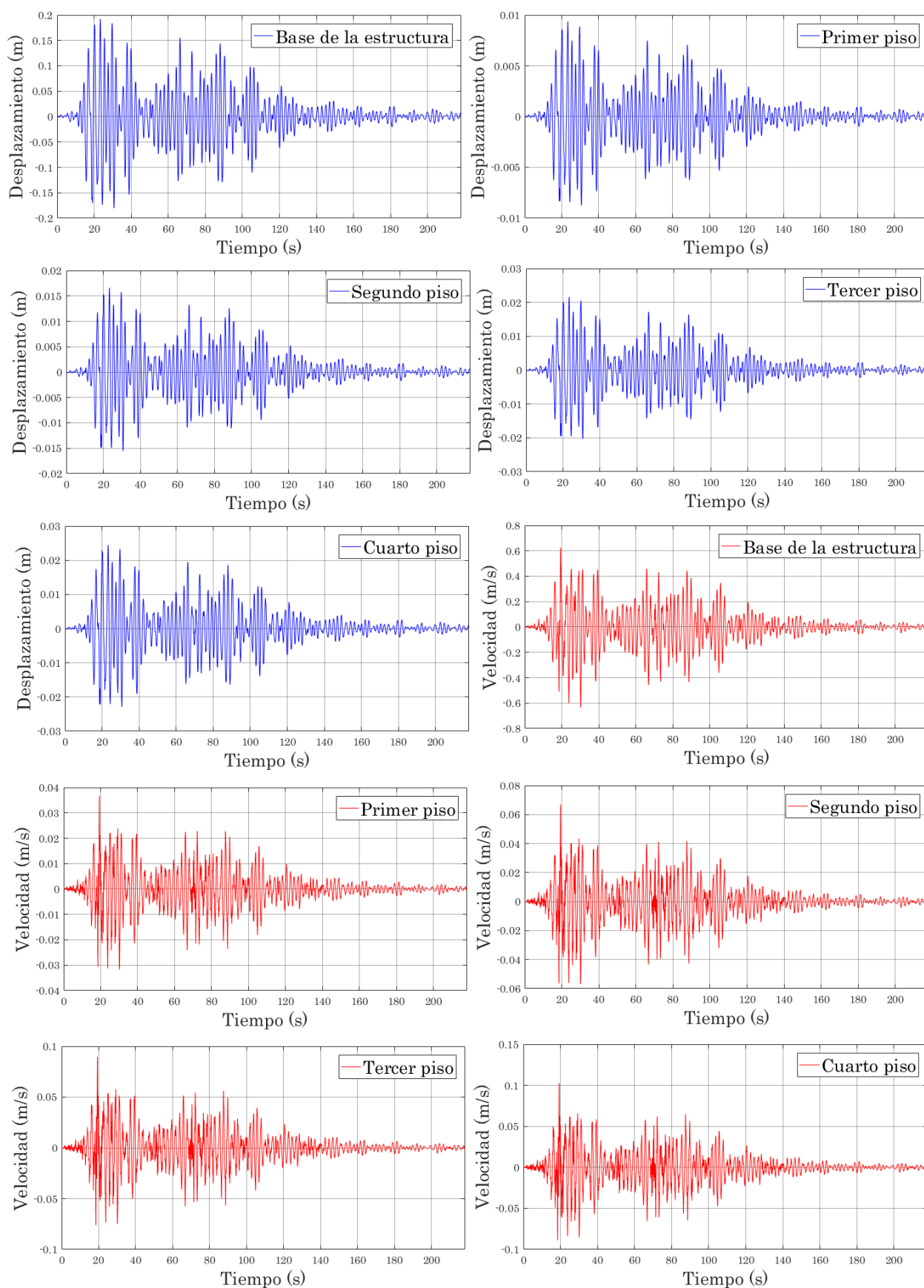
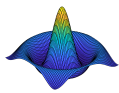


Figura 8.6: Historiales de desplazamientos y velocidades.



8.3. Planteamiento matricial de un sistema con aislamiento

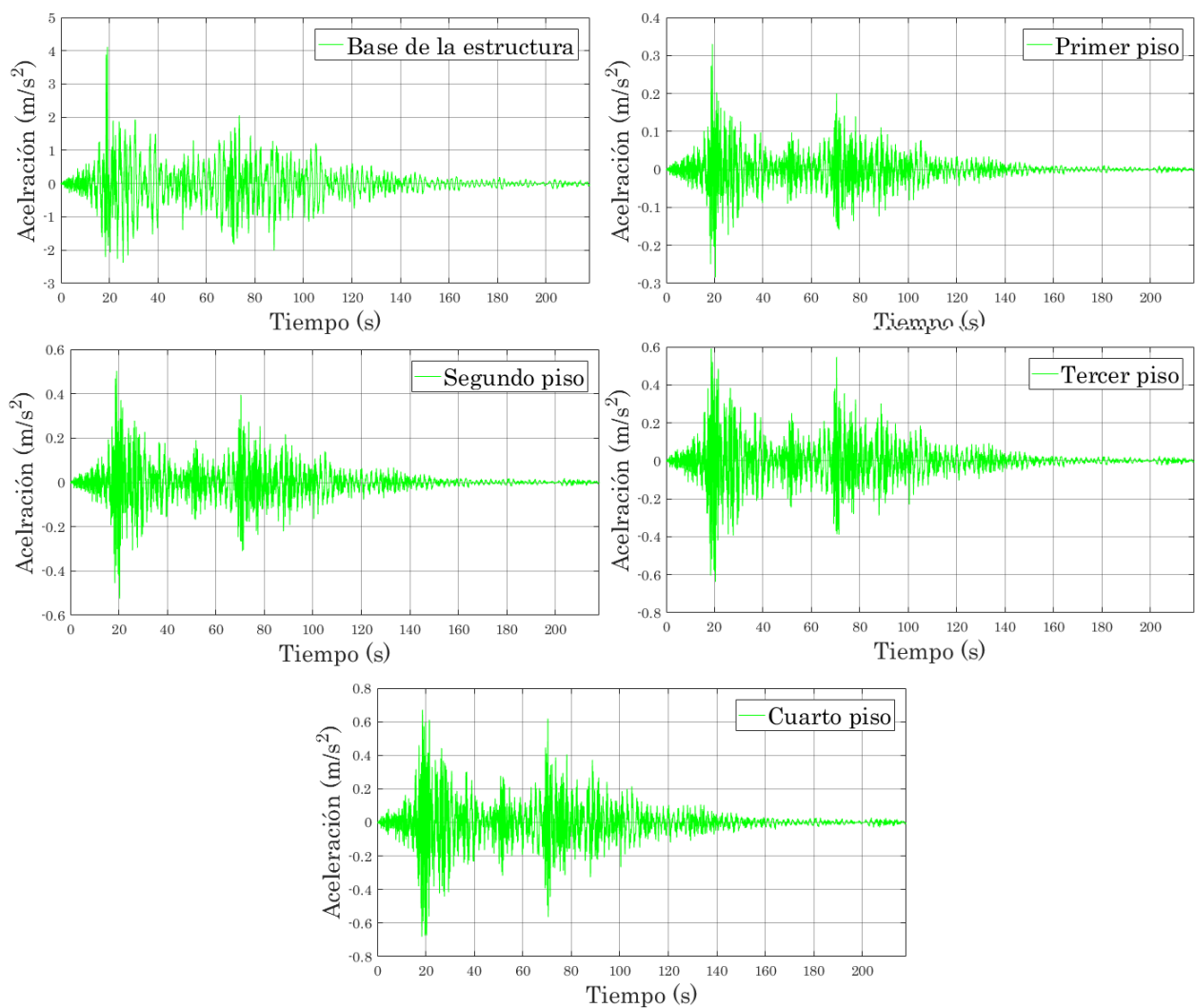


Figura 8.7: Historiales de aceleraciones.

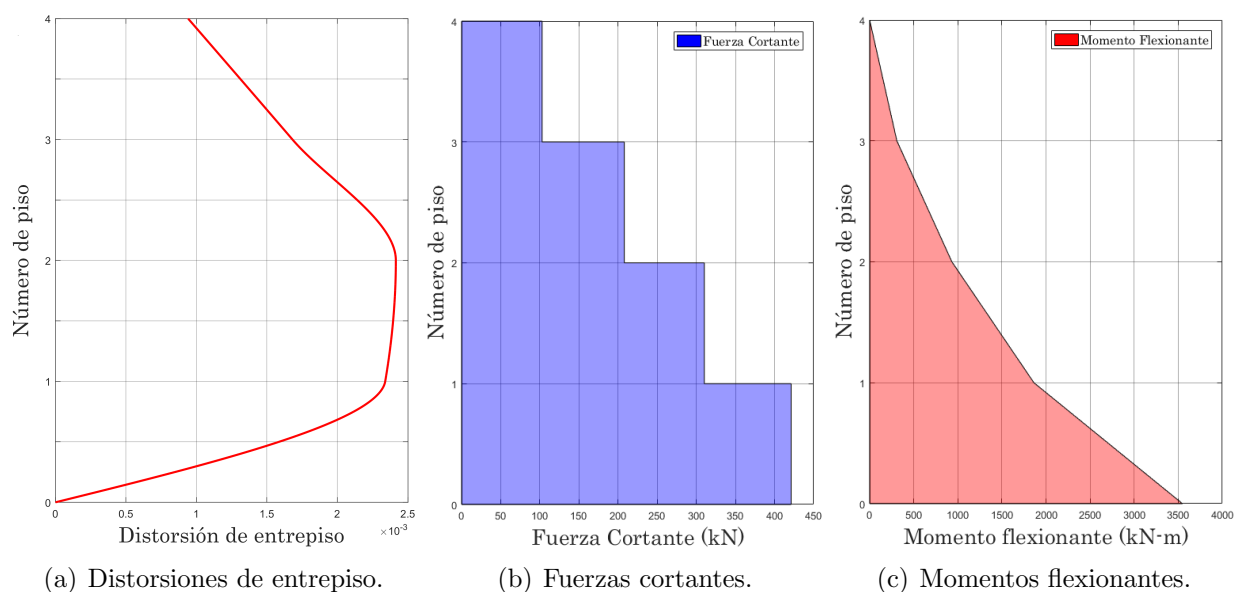
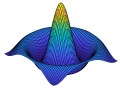


Figura 8.8: Derivas de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.



9. Análisis modal pseudo-tridimensional

9.1. Introducción

En este capítulo se presenta el detalle de las ecuaciones de un análisis modal sísmico y las consideraciones que habría que implementar para un modelo pseudo-tridimensional en dicho análisis; además, del planteamiento matricial y desarrollo en código fuente de un sistema tridimensional representativo sometido a una aceleración en la base.

9.2. Análisis modal sísmico

La ecuación 9.1, corresponde al equilibrio dinámico de un sistema sometido a una aceleración en la base,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mI_v\ddot{u}_G(t) \quad (9.1)$$

donde I_v es un vector compuesto de términos unitarios, el cual es una representación adecuada de los grados de libertad.

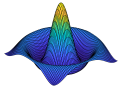
La solución de la ecuación 9.1, expresada en función de los modos de forma es proporcionada por la expresión 9.2,

$$u = \sum_{i=1}^n a_i(t)X_i = u = \sum_{i=1}^n d_i(t)\Gamma_i X_i \quad (9.2)$$

siendo su primera y segunda derivada las mostradas en la expresión 9.3,

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^n \ddot{a}_i(t)X_i \quad \wedge \quad \ddot{u} = \sum_{i=1}^n \ddot{d}_i(t)\Gamma_i X_i \quad (9.3)$$

donde n es la cantidad de modos, $d_i(t)$ es el factor de participación dinámica, Γ_i es el factor de participación estática y X_i es el modo de forma.



9.2. Análisis modal sísmico

La expresión del factor de participación estática Γ_i para una fuerza externa f es mostrada en la expresión 9.4,

$$\Gamma_i = \frac{X_i^T f}{X_i^T m X_i} \quad (9.4)$$

y para la aceleración en la base es mostrada en la ecuación 9.5.

$$\Gamma_i = \frac{X_i^T m I_v}{X_i^T m X_i} \quad (9.5)$$

Reemplazando la solución y sus derivadas (expresión 9.2 y expresión 9.3) en la ecuación 9.1, se obtiene la ecuación 9.6.

$$m \left(\sum_{i=1}^n \ddot{a}_i(t) X_i \right) + c \left(\sum_{i=1}^n \dot{a}_i(t) X_i \right) + k \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) X_i \right) = -m I_v \ddot{u}_G(t) \quad (9.6)$$

Luego se agrega el termino X_j^T en ambas partes de la ecuación anterior resultando en la ecuación 9.7.

$$X_j^T \sum_{i=1}^m (m X_i \ddot{a}_i(t) + c X_i \dot{a}_i(t) + k X_i a_i(t)) = -X_j^T m I_v \ddot{u}_G(t) \quad (9.7)$$

A partir de la propiedad de ortogonalidad se tienen las expresiones de las ecuaciones 9.8, 9.9 y 9.10,

$$X_i^T m X_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad \wedge \quad X_i^T m X_j = 1 \quad \text{si } j = i \quad (9.8)$$

$$X_i^T c X_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad (9.9)$$

$$X_i^T k X_j = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad (9.10)$$

siendo la ecuación final bajo las relaciones obtenidas por la propiedad de ortogonalidad (para $j=i$) la ecuación 9.11.

$$X_j^T m X_i \ddot{a}_i(t) + X_j^T c X_i \dot{a}_i(t) + X_j^T k X_i a_i(t) = -X_i^T m I_v \ddot{u}_G(t) \quad (9.11)$$

Dividiendo la ecuación 9.11 por $X_i^T m X_i$, se obtiene la ecuación 9.12,

$$\ddot{a}_i(t) + \frac{X_i^T c X_i}{X_i^T m X_i} \dot{a}_i(t) + \frac{X_i^T k X_i}{X_i^T m X_i} a_i(t) = -\frac{X_i^T m I_v}{X_i^T m X_i} \ddot{u}_G(t) \quad (9.12)$$

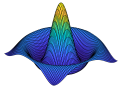
siendo,

$$\frac{X_i^T c X_i}{X_i^T m X_i} = 2\zeta_i \omega_i \quad \wedge \quad \frac{X_i^T k X_i}{X_i^T m X_i} = \omega_i^2 \quad \wedge \quad \frac{X_i^T m I_v}{X_i^T m X_i} = \Gamma_i \quad (9.13)$$

donde ω_i es la frecuencia circular, ζ_i la fracción de amortiguamiento modal y Γ_i factor de participación estática.

Finalmente, reemplazando las equivalencias de la expresión 9.12 en la ecuación 9.13 se obtiene la ecuación 9.14.

$$\ddot{a}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{a}_i(t) + \omega_i^2 a_i(t) = -\Gamma_i \ddot{u}_G(t) \quad (9.14)$$



9.3. Modelo pseudo-tridimensional

En términos del factor de participación dinámica $d_i(t)$, la ecuación modal del movimiento del sistema ocasionado por una aceleración en la base es la ecuación 9.15.

$$\ddot{d}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{d}_i(t) + \omega_i^2 d_i(t) = -\ddot{u}_G(t) \quad (9.15)$$

Consecuentemente, se tiene que la contribución modal al desplazamiento modal es la correspondiente a la expresión 9.16.

$$u_i = d_i(t)\Gamma_i X_i \quad (9.16)$$

En caso de considerarse el espectro de respuesta, el desplazamiento modal máximo estará dado por la expresión 9.17,

$$u_{i \max} = S_{di}\Gamma_i X_i \quad (9.17)$$

donde S_{di} es el valor del desplazamiento máximo del espectro de respuesta.

9.3. Modelo pseudo-tridimensional

El análisis tridimensional de un edificio tiene una mejor aproximación a la realidad, con respecto al uso de modelos simplificados de vigas en voladizo por pórtico visto anteriormente, bajo las simplificaciones del diafragma rígido en cada piso del edificio y de la asociación de las rigideces de los pórticos con tres grados de libertad globales (2 traslaciones y un giro) con respecto al centro de masas de la planta de cada piso; a esta asociación se le conoce como condensación cinemática. Al asumir estas simplificaciones se está realizando un análisis pseudo-tridimensional.

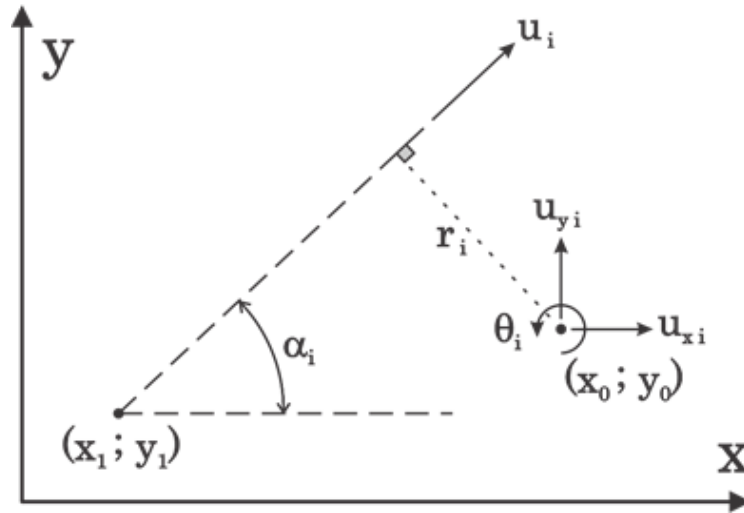
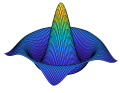


Figura 9.1: Ilustración del ángulo de compatibilidad de deformaciones α_i en la dirección u_i .

La figura 9.1 ilustra como considerar el ángulo de compatibilidad de deformaciones α_i , de un pórtico en la dirección u_i , con respecto al centro de masas del piso $(x_0; y_0)$.

La matriz de rigidez lateral k_L de cada pórtico se halla utilizando el método de las rigideces en conjunto con la condensación estática. Para asociar las rigideces laterales halladas con respecto a una matriz de rigidez de piso (3 g.d.l.) se utiliza la matriz de compatibilidad de deformaciones G (condensación cinemática).



9.3. Modelo pseudo-tridimensional

Para el caso del análisis pseudo-tridimensional, la matriz de rigidez es la mostrada en la expresión 9.18,

$$k = \sum_{i=1}^P G_i^T k_{Li} G_i \quad (9.18)$$

donde P es la cantidad de pórticos respectivamente para el eje X y eje Y ; y G es una matriz de acuerdo a la expresión 9.19,

$$G_i = [\cos(\alpha_i)I \ \sin(\alpha_i)I \ r_i] \quad (9.19)$$

donde I es la matriz identidad y r_i es la matriz diagonal de la distancia del pórtico al centro de masas del piso; la cual está formada por términos que obedecen la ecuación 9.20.

$$r_i = (x_i - x_0)\sin(\alpha_i) - (y_i - y_0)\cos(\alpha_i) \quad (9.20)$$

La matriz de masas del sistema sigue siendo diagonal, ya que el análisis es entorno al centro de masas por piso, aunque en esta ocasión aparece el termino del momento polar de inercia de la masa J_i .

Siendo la matriz de masas de un sistema de un piso para el análisis pseudo-tridimensional la matriz de la expresión 9.21,

$$m = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{x1} & u_{y1} & \theta_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.21)$$

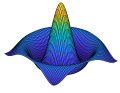
y en el caso de tener dos pisos la matriz de la expresión 9.22,

$$m = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{x1} & u_{x2} & u_{y1} & u_{y2} & \theta_1 & \theta_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{y1} \\ u_{y2} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9.22)$$

donde J_i , para una planta rectangular regular de dimensiones L_1 y L_2 tiene la formulación de la expresión 9.23.

$$J_i = \frac{m_i(L_1^2 + L_2^2)}{12} \quad (9.23)$$

Al realizar el análisis modal en un modelo pseudo-tridimensional, se utiliza el problema de valores característicos (expresión 9.24) para obtener los vectores X_i y valores propios λ_i ;



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

$$kX = \omega^2 mX \quad \vee \quad AX = \lambda BX \quad (9.24)$$

y el desplazamiento modal es dado por la ecuación 9.25.

$$u_i = d_i(t) \Gamma_i X_i \quad (9.25)$$

De considerarse el espectro de respuesta de desplazamientos y aceleraciones, entonces se usarán las expresiones 9.26 y 9.27, respectivamente.

$$u_{i, max} = S_{di} \Gamma_i X_i \quad (9.26)$$

$$\ddot{u}_{i, max} = S_{ai} \Gamma_i X_i \quad (9.27)$$

Se considera la ecuación 9.28 al trabajar con un registro de aceleración en x ,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mJ_{vx}\ddot{u}_{G,x}(t) \quad (9.28)$$

donde J_{vx} (ecuación 9.29) es un vector compuesto de términos unitarios solo en x y compuesto de ceros en y y θ ; en el caso de un sistema de 2 niveles:

$$J_{vx}^T = [(1 \ 1) \ (0 \ 0) \ (0 \ 0)] \quad (9.29)$$

y el factor de participación estática con respecto a x esta dado por la expresión 9.30.

$$\Gamma_{i,x} = \frac{X_i^T m J_{vx}}{X_i^T m X_i} \quad (9.30)$$

Similarmente, con un registro de aceleración en y se considera la ecuación 9.31,

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mJ_{vy}\ddot{u}_{G,y}(t) \quad (9.31)$$

donde J_{vy} (expresión 9.32) es un vector compuesto de términos unitarios sólo en y y compuesto de ceros en x y θ ; en el caso de un sistema de 2 niveles:

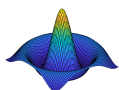
$$J_{vy}^T = [(0 \ 0) \ (1 \ 1) \ (0 \ 0)] \quad (9.32)$$

y el factor de participación estática con respecto a y está dado por la expresión 9.33.

$$\Gamma_{i,y} = \frac{X_i^T m J_{vy}}{X_i^T m X_i} \quad (9.33)$$

9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

El pórtico tridimensional a desarrollarse corresponde a la figura 9.2; donde las columnas del primer piso tienen 4.00 m de altura y las de los pisos siguientes tienen 3.00 m , dichas columnas están espaciadas 5.00 m horizontalmente a ejes; las dimensiones de las secciones transversales son 0.50 $m \times 0.50 m$ en columnas de esquina y 0.75 $m \times 0.75 m$ para las demás columnas; vigas de sección transversal de 0.30 $m \times 0.50 m$; y el módulo de elasticidad del material considerado es $E = 21316773.9449 \text{ kN/m}^2$.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

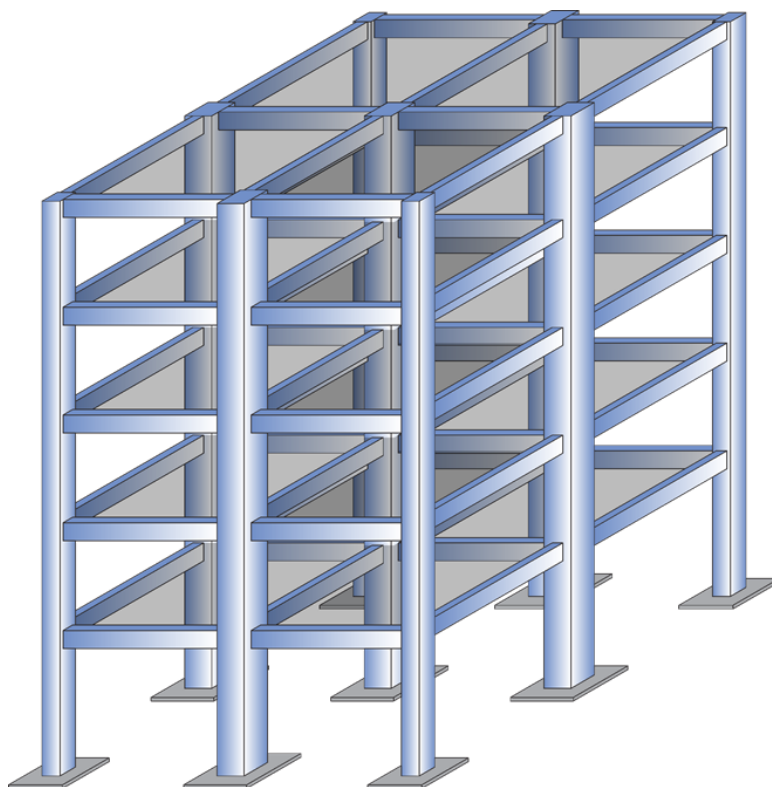


Figura 9.2: Pórtico tridimensional.

Para empezar, se establecen las matrices de rigidez de cada pórtico bidimensional del sistema tridimensional, clasificando los pórticos de acuerdo a los ejes 1, 2, 3, A, B y C (figura 9.3);

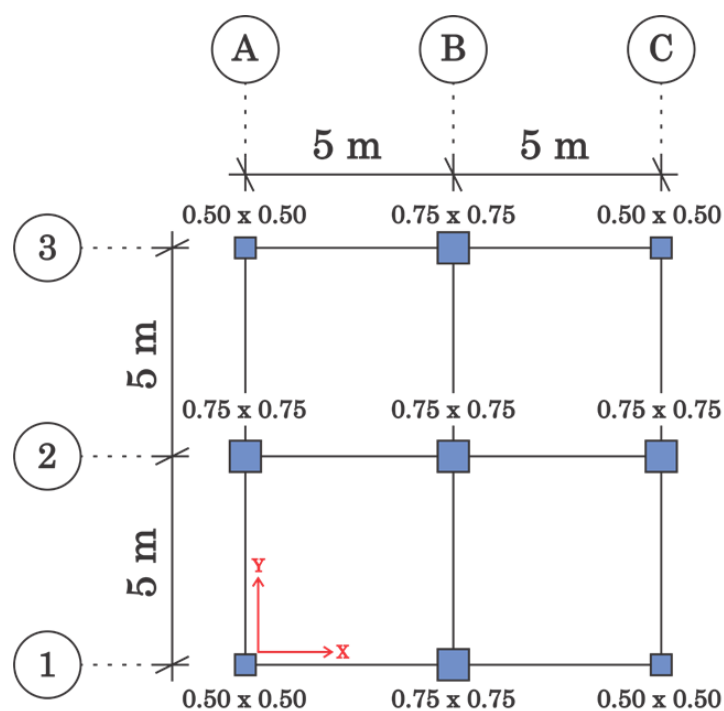
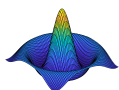


Figura 9.3: Vista en planta del pórtico tridimensional.

cuyas matrices de rigidez se muestran en las expresiones desde la 9.34a hasta la 9.34f.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

$$K_1 = \begin{bmatrix} 369750.00 & -294240.00 & 107170.00 & -23712.00 & 3804.80 \\ -294240.00 & 448940.00 & -317880.00 & 108370.00 & -17354.00 \\ 107170.00 & -317880.00 & 451980.00 & -300550.00 & 75890.00 \\ -23712.00 & 108370.00 & -300550.00 & 370490.00 & -158290.00 \\ 3804.80 & -17354.00 & 75890.00 & -158290.00 & 96541.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 775410.00 & -623520.00 & 246690.00 & -58116.00 & 9579.40 \\ -623520.00 & 921950.00 & -672190.00 & 246480.00 & -40622.00 \\ 246690.00 & -672190.00 & 926350.00 & -623870.00 & 164550.00 \\ -58116.00 & 246480.00 & -623870.00 & 715480.00 & -289760.00 \\ 9579.40 & -40622.00 & 164550.00 & -289760.00 & 157860.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 369750.00 & -294240.00 & 107170.00 & -23712.00 & 3804.80 \\ -294240.00 & 448940.00 & -317880.00 & 108370.00 & -17354.00 \\ 107170.00 & -317880.00 & 451980.00 & -300550.00 & 75890.00 \\ -23712.00 & 108370.00 & -300550.00 & 370490.00 & -158290.00 \\ 3804.80 & -17354.00 & 75890.00 & -158290.00 & 96541.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34c)$$

$$K_A = \begin{bmatrix} 369750.00 & -294240.00 & 107170.00 & -23712.00 & 3804.80 \\ -294240.00 & 448940.00 & -317880.00 & 108370.00 & -17354.00 \\ 107170.00 & -317880.00 & 451980.00 & -300550.00 & 75890.00 \\ -23712.00 & 108370.00 & -300550.00 & 370490.00 & -158290.00 \\ 3804.80 & -17354.00 & 75890.00 & -158290.00 & 96541.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34d)$$

$$K_B = \begin{bmatrix} 775410.00 & -623520.00 & 246690.00 & -58116.00 & 9579.40 \\ -623520.00 & 921950.00 & -672190.00 & 246480.00 & -40622.00 \\ 246690.00 & -672190.00 & 926350.00 & -623870.00 & 164550.00 \\ -58116.00 & 246480.00 & -623870.00 & 715480.00 & -289760.00 \\ 9579.40 & -40622.00 & 164550.00 & -289760.00 & 157860.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34e)$$

$$K_C = \begin{bmatrix} 369750.00 & -294240.00 & 107170.00 & -23712.00 & 3804.80 \\ -294240.00 & 448940.00 & -317880.00 & 108370.00 & -17354.00 \\ 107170.00 & -317880.00 & 451980.00 & -300550.00 & 75890.00 \\ -23712.00 & 108370.00 & -300550.00 & 370490.00 & -158290.00 \\ 3804.80 & -17354.00 & 75890.00 & -158290.00 & 96541.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m} \quad (9.34f)$$

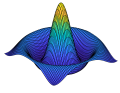
Ahora se establece la tabla 9.1 con las coordenadas iniciales (X_i ; Y_i) y los ángulos de orientación de cada uno de los pórticos representados por sus ejes.

Pórtico	X_i	Y_i	α	Pórtico	X_i	Y_i	α
Eje 1	0	0	0	Eje A	0	0	90
Eje 2	0	5	0	Eje B	5	0	90
Eje 3	0	10	0	Eje C	10	0	90

Tabla 9.1: Coordenadas iniciales y ángulos de orientación de los pórticos bidimensionales.

Las coordenadas del centro de masa de acuerdo a la figura 9.3 corresponden a (X_0, Y_0) = (5, 5) por tratarse de una estructura regular.

Seguidamente, se procede a hallar las distancias perpendiculares (r_i) de cada pórtico con respecto al centro de masas con la ecuación 9.20 (Tabla 9.2).



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

Pórtico	r_i	Pórtico	r_i	Pórtico	r_i
Eje 1	5	Eje 2	0	Eje 3	-5
Eje A	-5	Eje B	0	Eje C	5

Tabla 9.2: Valores r_i de los pórticos bidimensionales.

Posteriormente, se obtienen las matrices de compatibilidad de deformaciones (G_i) con la ecuación 9.19; las cuales se presentan en las expresiones desde la 9.35a hasta la 9.35f.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (9.35a)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35b)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35c)$$

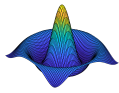
$$G_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35d)$$

$$G_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35e)$$

$$G_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.35f)$$

Finalmente, se procede a obtener la matriz de rigidez de todo el sistema utilizando la ecuación 9.18.

A continuación, se presentan las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema obtenidas con los datos propuestos.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 209.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 172.96 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 172.96 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 172.96 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 167.96 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3494.70 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2882.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2882.70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 2882.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 2799.30 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s^2}{m}$$

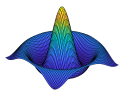
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9463.2000 & -7504.8000 & 2854.8000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -7504.8000 & 11337.0000 & -8099.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 2854.8000 & -8099.0000 & 11402.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -653.5128 & 2868.3000 & -7585.2000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 106.4361 & -466.4496 & 1958.7000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 66363.0000 & -14683.0000 & 2356.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & -196840.0000 & 67103.0000 & -10746.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 281010.0000 & -186100.0000 & 46992.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & -186100.0000 & 230550.0000 & -98013.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & \dots & 46992.0000 & -98013.0000 & 60883.0000 \end{bmatrix} \frac{kN \cdot s}{m}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1514900.00 & -1212000.00 & 461040.00 & \dots & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1212000.00 & 1819800.00 & -1308000.00 & \dots & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 461040.00 & -1308000.00 & 1830300.00 & \dots & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -105540.00 & 463220.00 & -1225000.00 & \dots & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 17189.00 & -75330.00 & 316330.00 & \dots & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 0.0000 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 10717000.00 & -2371200.00 & 380480.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & -31788000.00 & 10837000.00 & -1735400.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 45198000.00 & -30055000.00 & 7589000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & -30055000.00 & 37049000.00 & -15829000.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & \dots & 7589000.00 & -15829000.00 & 9654100.00 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Similarmente a lo mostrado en el capítulo 1, se realiza el desarrollo propuesto por el método de reducción de orden. En el caso que se considere un registro de aceleración en x , se realiza el desarrollo en base a la ecuación 9.28; la cual por conveniencia se repite a continuación;

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -mJ_{vx}\ddot{u}_{G,x}(t)$$

ahora, considerando el sistema de la figura 9.2, habrá que asignar las variables de x_1 a x_{30} ; siendo los arreglos matriciales mostrados en las ecuaciones 9.36a y 9.36b obtenidos de las relaciones determinadas entre las derivadas de las variables asignadas (de $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_{30}$) y entre el desplazamiento, velocidad y aceleración de los quince grados de libertad del sistema.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

$$\dot{\mathbf{x}}_{30 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{15 \times 15} & \mathbf{I}_{15 \times 15} \\ -\mathbf{KM}^{-1}_{15 \times 15} & -\mathbf{CM}^{-1}_{15 \times 15} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}_{30 \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{15 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{10 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \ddot{u}_g \quad (9.36a)$$

$$\mathbf{y}_{45 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{15 \times 1} \\ \dot{\mathbf{u}}_{15 \times 1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{15 \times 1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{15 \times 15} & \mathbf{0}_{15 \times 15} \\ \mathbf{0}_{15 \times 15} & \mathbf{I}_{15 \times 15} \\ -\mathbf{KM}^{-1}_{15 \times 15} & -\mathbf{CM}^{-1}_{15 \times 15} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}_{45 \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{15 \times 1} \\ \mathbf{0}_{15 \times 1} \\ -\mathbf{1}_{5 \times 1} \\ \mathbf{0}_{10 \times 1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \ddot{u}_g \quad (9.36b)$$

Una manera compacta de representar los arreglos matriciales anteriores se da en las ecuaciones 9.37a y 9.37b.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}\ddot{u}_g \quad (9.37a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{D}\ddot{u}_g \quad (9.37b)$$

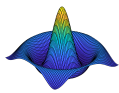
9.4.1. Ejemplo: Análisis pseudo tridimensional en edificio de 5 pisos

El pórtico bidimensional a desarrollarse corresponde a la figura 9.2; donde la matriz de masas, rigidez y amortiguamiento corresponden a lo expuesto anteriormente en el planteamiento matricial; y la aceleración del suelo está dada por el registro N-S del sismo de Pisco del 15/08/2007.

Solución: En primera instancia, se presenta la secuencia de las declaraciones para realizar el ensamblaje de las matrices de rigidez de los pórticos bidimensionales;

```

1 % Emsamblaje. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado e Ing. Raul Franco
2 % Guzmán López. Maestros en Ciencias con mención en Ingeniería
3 % Estructural de la Universidad Nacional de Ingeniería.
4 % Funciones de limpieza
5 clc; clear all; close all;
6 % Matrices de rigidez de pórticos bidimensionales
7 load 'K1.mat'
8 load 'K2.mat'
9 load 'K3.mat'
10 load 'KA.mat'
11 load 'KB.mat'
12 load 'KC.mat'
13 ns=5; % Número de pisos
14 np=6; % Número de Pórticos
15 ei=[0 0; 0 5; 0 10; 0 0; 5 0; 10 0]; % Coordenadas iniciales
16 angulo=[0 0 0 90 90 90]; % ángulos de orientación
17 cm=[5 5]; % Coordenadas del centro de masa
18 % Cálculo de r para cada pórtico bidimensional
19 for i=1:np
20     r(i)=(ei(i,1)-cm(1,1))*sind(angulo(i))-(ei(i,2)-cm(1,2))*cosd(angulo(i));
21 end
22 % Asignación de las matrices de rigideces en la matriz k
23 k(:, :, 1)=K1;
24 k(:, :, 2)=K2;
```

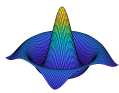


9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
25 k(:,:,3)=K3;  
26 k(:,:,4)=KA;  
27 k(:,:,5)=KB;  
28 k(:,:,6)=KC;  
29 % Cálculo de G para cada pórtico bidimensional  
30 for i=1:np  
31     G(:,:,i)=[diag(cosd(angulo(i))*ones(1,ns)) diag(sind(angulo(i))*ones(1,ns))  
               (1,ns) diag(r(i)*ones(1,ns))];  
32 end  
33 % Emsamblaje de las matrices de rigideces.  
34 K=zeros(3*ns);  
35 for i=1:np  
36     K=K+G(:,:,i)'*k(:,:,i)*G(:,:,i);  
37 end
```

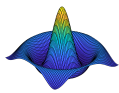
luego, la secuencia de la declaración de todos los datos del problema y el análisis corresponde al código fuente mostrado en el siguiente script:

```
1 % Análisis pseudo tridimensional. Por Ing. Miguel Raúl Guzmán Prado  
2 % y Ing. Raul Franco Guzmán López. Maestros en Ciencias con Mención  
3 % en Ingeniería Estructural de la Universidad Nacional de  
4 % Ingeniería.  
5 % Funciones de limpieza  
6 clc; clear all; close all;  
7 % Matrices de masa, amortiguamiento y rigidez  
8 load 'M.mat'  
9 load 'CC.mat'  
10 load 'K.mat'  
11 calc1=size(M);  
12 ndgl=calc1(1);  
13 % Cálculo de la matriz A  
14 A=[zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\CC];  
15 % Cálculo de la matriz B  
16 B=[zeros(15,1); -1*ones(5,1); zeros(10,1)];  
17 % Cálculo de la matriz C  
18 C=[eye(ndgl) zeros(ndgl); zeros(ndgl) eye(ndgl); -M\K -M\CC];  
19 % Cálculo de la matriz D  
20 D=[zeros(30,1); -1*ones(5,1); zeros(10,1)];  
21 % Componente de la aceleración del suelo registrada  
22 load Ica.txt  
23 t=Ica(:,1);  
24 u=Ica(:,3)/100;  
25 % Solución del sistema de ecuaciones diferenciales  
26 x0=zeros(1,30);  
27 sys=ss(A,B,C,D);  
28 [y,t]=lsim(sys,u,t,x0);  
29 % Visualización numérica de los resultados.  
30 f = figure('Name','Historiales de desplazamientos, velocidades y  
    aceleraciones','NumberTitle','off','Position',[500 500 865 300]);  
31 set(gcf,'Color','w');  
32 cnames = {'t','x1','x2','x3','x4','x5','x6','x7','x8','x9','x10','x11','x12',  
    'x13','x14','x15','v1','v2','v3','v4','v5','v6','v7','v8','v9','v10',  
    'v11','v12','v13','v14','v15','a1','a2','a3','a4','a5','a6','a7',  
    'a8','a9','a10','a11','a12','a13','a14','a15'};  
33 uitable('Parent',f,'Data',[t y(:,:)],'ColumnName',cnames,'RowName',[],'  
    Position',[50 25 770 255]);
```



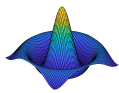
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
34 % Registro de aceleración del suelo
35 figure('Name','Registro de aceleraciones del suelo','NumberTitle','off',↵
    'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
36 subplot(2,1,1)
37 set(gcf,'Color','w');
38 plot(t,u,'Color',[0.87 0.49 0],'LineWidth',0.5)
39 xlim([0 t(end,1)])
40 get(gca,'XTick');
41 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
42 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo','FontSize',24,'FontName'↵
    ,'Century','FontWeight','bold')
43 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
44 ylabel('Aceleración del suelo (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century'↵
    ')
45 grid on
46 lgd=legend('Sismo de Pisco');
47 lgd.FontSize=20;
48 lgd.FontName='Century';
49 set(gca,'GridAlpha',0.40);
50 % Historiales de desplazamientos
51 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Desplazamientos','NumberTitle','off',↵
    'units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
52 subplot(2,2,1)
53 set(gcf,'Color','w');
54 plot(t,y(:,1),'Color','b','LineWidth',0.5)
55 xlim([0 t(end,1)])
56 get(gca,'XTick');
57 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
58 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','↵
    Century','FontWeight','bold')
59 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
60 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
61 grid on
62 lgd=legend('Primer piso');
63 lgd.FontSize=20;
64 lgd.FontName='Century';
65 set(gca,'GridAlpha',0.40);
66 subplot(2,2,2)
67 set(gcf,'Color','w');
68 plot(t,y(:,2),'Color','b','LineWidth',0.5)
69 xlim([0 t(end,1)])
70 get(gca,'XTick');
71 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
72 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento','FontSize',24,'FontName','↵
    Century','FontWeight','bold')
73 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
74 ylabel('Desplazamiento (m)','FontSize',20,'FontName','Century')
75 grid on
76 lgd=legend('Segundo piso');
77 lgd.FontSize=20;
78 lgd.FontName='Century';
79 set(gca,'GridAlpha',0.40);
80 subplot(2,2,3)
81 set(gcf,'Color','w');
82 plot(t,y(:,3),'Color','b','LineWidth',0.5)
83 xlim([0 t(end,1)])
84 get(gca,'XTick');
```



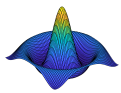
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
85 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
86 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
87 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
88 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
89 grid on
90 lgd=legend('Tercer piso');
91 lgd.FontSize=20;
92 lgd.FontName='Century';
93 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
94 subplot(2,2,4)
95 set(gcf, 'Color', 'w');
96 plot(t,y(:,4), 'Color', 'b', 'LineWidth', 0.5)
97 xlim([0 t(end,1)])
98 get(gca, 'XTick');
99 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
100 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
101 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
102 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
103 grid on
104 lgd=legend('Cuarto piso');
105 lgd.FontSize=20;
106 lgd.FontName='Century';
107 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
108 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Desplazamientos', 'NumberTitle', 'off', '←
    units', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
109 subplot(2,2,1)
110 set(gcf, 'Color', 'w');
111 plot(t,y(:,5), 'Color', 'b', 'LineWidth', 0.5)
112 xlim([0 t(end,1)])
113 get(gca, 'XTick');
114 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
115 title('Gráfica Tiempo vs Desplazamiento', 'FontSize', 24, 'FontName', '←
    Century', 'FontWeight', 'bold')
116 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
117 ylabel('Desplazamiento (m)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
118 grid on
119 lgd=legend('Quinto piso');
120 lgd.FontSize=20;
121 lgd.FontName='Century';
122 set(gca, 'GridAlpha', 0.40);
123 % Historiales de Velocidades
124 figure('Name', 'Gráfica Tiempo vs Velocidades', 'NumberTitle', 'off', 'units←
    ', 'normalized', 'outerposition', [0 0 1 1]);
125 subplot(2,2,1)
126 set(gcf, 'Color', 'w');
127 plot(t,y(:,16), 'Color', 'r', 'LineWidth', 0.5)
128 xlim([0 t(end,1)])
129 get(gca, 'XTick');
130 set(gca, 'FontSize', 12, 'FontName', 'Century')
131 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad', 'FontSize', 24, 'FontName', 'Century', '←
    FontWeight', 'bold')
132 xlabel('Tiempo (s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
133 ylabel('Velocidad (m/s)', 'FontSize', 20, 'FontName', 'Century')
134 grid on
135 lgd=legend('Base de la estructura');
```



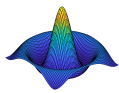
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
136 lgd.FontSize=20;
137 lgd.FontName='Century';
138 set(gca,'GridAlpha',0.40);
139 subplot(2,2,2)
140 set(gcf,'Color','w');
141 plot(t,y(:,17),'Color','r','LineWidth',0.5)
142 xlim([0 t(end,1)])
143 get(gca,'XTick');
144 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
145 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad','FontSize',24,'FontName','Century','↵
    FontWeight','bold')
146 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
147 ylabel('Velocidad (m/s)','FontSize',20,'FontName','Century')
148 grid on
149 lgd=legend('Primer piso');
150 lgd.FontSize=20;
151 lgd.FontName='Century';
152 set(gca,'GridAlpha',0.40);
153 subplot(2,2,3)
154 set(gcf,'Color','w');
155 plot(t,y(:,18),'Color','r','LineWidth',0.5)
156 xlim([0 t(end,1)])
157 get(gca,'XTick');
158 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
159 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad','FontSize',24,'FontName','Century','↵
    FontWeight','bold')
160 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
161 ylabel('Velocidad (m/s)','FontSize',20,'FontName','Century')
162 grid on
163 lgd=legend('Segundo piso');
164 lgd.FontSize=20;
165 lgd.FontName='Century';
166 set(gca,'GridAlpha',0.40);
167 subplot(2,2,4)
168 set(gcf,'Color','w');
169 plot(t,y(:,19),'Color','r','LineWidth',0.5)
170 xlim([0 t(end,1)])
171 get(gca,'XTick');
172 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
173 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad','FontSize',24,'FontName','Century','↵
    FontWeight','bold')
174 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
175 ylabel('Velocidad (m/s)','FontSize',20,'FontName','Century')
176 grid on
177 lgd=legend('Tercer piso');
178 lgd.FontSize=20;
179 lgd.FontName='Century';
180 set(gca,'GridAlpha',0.40);
181 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Velocidades','NumberTitle','off','units↵
    ','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
182 subplot(2,2,1)
183 set(gcf,'Color','w');
184 plot(t,y(:,20),'Color','r','LineWidth',0.5)
185 xlim([0 t(end,1)])
186 get(gca,'XTick');
187 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
188 title('Gráfica Tiempo vs Velocidad','FontSize',24,'FontName','Century','↵
```



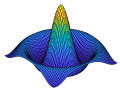
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
    FontWeight','bold')
189 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
190 ylabel('Velocidad (m/s)','FontSize',20,'FontName','Century')
191 grid on
192 lgd=legend('Cuarto piso');
193 lgd.FontSize=20;
194 lgd.FontName='Century';
195 set(gca,'GridAlpha',0.40);
196 % Historiales de Aceleraciones
197 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Aceleraciones','NumberTitle','off','←
    units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
198 subplot(2,2,1)
199 set(gcf,'Color','w');
200 set(gca,'Color','w');
201 plot(t,y(:,31),'Color','g','LineWidth',0.5)
202 xlim([0 t(end,1)])
203 get(gca,'XTick');
204 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
205 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
206 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
207 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
208 grid on
209 lgd=legend('Primer piso');
210 lgd.FontSize=20;
211 lgd.FontName='Century';
212 set(gca,'GridAlpha',0.40);
213 subplot(2,2,2)
214 set(gcf,'Color','w');
215 set(gca,'Color','w');
216 plot(t,y(:,32),'Color','g','LineWidth',0.5)
217 xlim([0 t(end,1)])
218 get(gca,'XTick');
219 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
220 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
221 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
222 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
223 grid on
224 lgd=legend('Segundo piso');
225 lgd.FontSize=20;
226 lgd.FontName='Century';
227 set(gca,'GridAlpha',0.40);
228 subplot(2,2,3)
229 set(gcf,'Color','w');
230 set(gca,'Color','w');
231 plot(t,y(:,33),'Color','g','LineWidth',0.5)
232 xlim([0 t(end,1)])
233 get(gca,'XTick');
234 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
235 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'←
    , 'FontWeight','bold')
236 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
237 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
238 grid on
239 lgd=legend('Tercer piso');
240 lgd.FontSize=20;
```



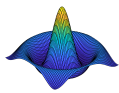
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
241 lgd.FontName='Century';
242 set(gca,'GridAlpha',0.40);
243 subplot(2,2,4)
244 plot(t,y(:,34),'Color','g','LineWidth',0.5)
245 xlim([0 t(end,1)])
246 get(gca,'XTick');
247 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
248 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'↵
      , 'FontWeight','bold')
249 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
250 ylabel('Acelración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
251 grid on
252 lgd=legend('Cuarto piso');
253 lgd.FontSize=20;
254 lgd.FontName='Century';
255 set(gca,'GridAlpha',0.40);
256 figure('Name','Gráfica Tiempo vs Aceleraciones','NumberTitle','off',↵
      units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
257 subplot(2,2,1)
258 set(gcf,'Color','w');
259 set(gca,'Color','w');
260 plot(t,y(:,35),'Color','g','LineWidth',0.5)
261 xlim([0 t(end,1)])
262 get(gca,'XTick');
263 set(gca,'FontSize',12,'FontName','Century')
264 title('Gráfica Tiempo vs Aceleración','FontSize',24,'FontName','Century'↵
      , 'FontWeight','bold')
265 xlabel('Tiempo (s)','FontSize',20,'FontName','Century')
266 ylabel('Aceleración (m/s^2)','FontSize',20,'FontName','Century')
267 grid on
268 lgd=legend('Quinto piso');
269 lgd.FontSize=20;
270 lgd.FontName='Century';
271 set(gca,'GridAlpha',0.40);
272 % Relaciones de derivas de entrepiso
273 hor(6)=max(abs([min(y(:,5)-y(:,4)) max(y(:,5)-y(:,4))]))/3;
274 hor(5)=max(abs([min(y(:,4)-y(:,3)) max(y(:,4)-y(:,3))]))/3;
275 hor(4)=max(abs([min(y(:,3)-y(:,2)) max(y(:,3)-y(:,2))]))/3;
276 hor(3)=max(abs([min(y(:,2)-y(:,1)) max(y(:,2)-y(:,1))]))/3;
277 hor(2)=max(abs([min(y(:,1)) max(y(:,1))]))/4;
278 hor(1)=0;
279 figure('Name','Relaciones de derivas de entrepiso','NumberTitle','off',↵
      Position',[625 100 575 750])
280 set(gca,'Color','w')
281 set(gcf,'Color','w')
282 x=hor;
283 st=0:1:5;
284 yy=0:0.001:max(st);
285 xx=interp1(st,x,yy,'pchip');
286 plot(xx,yy,'r','LineWidth',2)
287 title('Derivas de entrepiso','FontName','Century','FontSize',20)
288 xlabel('Deriva de entrepiso','FontSize',20,'FontName','Century')
289 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century')
290 hold on
291 grid on
292 set(gca,'GridAlpha',0.40);
293 % Visualización interactiva del historial de desplazamientos
```



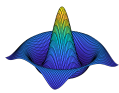
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
294 figure('Name','Visualización interactiva de desplazamientos','↵
      NumberTitle','off','units','normalized','outerposition',[0 0 1 1]);
295 set(gcf,'Color','w')
296 set(gca,'Color','w','Visible','off')
297 axis tight
298 x1=100*y(:,1);
299 x2=100*y(:,2);
300 x3=100*y(:,3);
301 x4=100*y(:,4);
302 x5=100*y(:,5);
303 kk=2.5;
304 for k=1:length(x1)
305     y1 = 4*ones(1,length(x1));
306     y2 = 7*ones(1,length(x2));
307     y3 = 10*ones(1,length(x3));
308     y4 = 13*ones(1,length(x4));
309     y5 = 16*ones(1,length(x5));
310     XX = [0 10 10 0];
311     YY = [0 0 10 10];
312     ZZ1 = [4 4 4 4];
313     ZZ2 = [7 7 7 7];
314     ZZ3 = [10 10 10 10];
315     L4=[13 13 13 13];
316     L5=[16 16 16 16];
317     pointA = [XX(1)+x1(k),YY(1),ZZ1(1)]; pointB = [XX(2)+x1(k),YY(2),ZZ1↵
        (2)]; pointC = [XX(3)+x1(k),YY(3),ZZ1(3)]; pointD = [XX(4)+x1(k),YY↵
        (4),ZZ1(4)];
318     pointsA=[pointA' pointB' pointC' pointD'];
319     fill3(pointsA(1,:),pointsA(2,:),pointsA(3:,:), 'c')
320     grid on; hold on; alpha(0.3)
321     set(gca,'Color','w','Visible','off')
322     pointAA = [XX(1)+x2(k),YY(1),ZZ2(1)]; pointBB = [XX(2)+x2(k),YY(2),ZZ2↵
        (2)]; pointCC = [XX(3)+x2(k),YY(3),ZZ2(3)]; pointDD = [XX(4)+x2(k),↵
        YY(4),ZZ2(4)];
323     pointsAA=[pointAA' pointBB' pointCC' pointDD'];
324     fill3(pointsAA(1,:),pointsAA(2,:),pointsAA(3:,:), 'c')
325     grid on; hold on; alpha(0.3)
326     pointAAA = [XX(1)+x3(k),YY(1),ZZ3(1)]; pointBBB = [XX(2)+x3(k),YY(2),↵
        ZZ3(2)]; pointCCC = [XX(3)+x3(k),YY(3),ZZ3(3)]; pointDDD = [XX(4)+↵
        x3(k),YY(4),ZZ3(4)];
327     pointsAAA=[pointAAA' pointBBB' pointCCC' pointDDD'];
328     fill3(pointsAAA(1,:),pointsAAA(2,:),pointsAAA(3:,:), 'c')
329     grid on; hold on; alpha(0.3)
330     pointL4A = [XX(1)+x4(k),YY(1),L4(1)]; pointL4B = [XX(2)+x4(k),YY(2),L4↵
        (2)]; pointL4C = [XX(3)+x4(k),YY(3),L4(3)]; pointL4D = [XX(4)+x4(k)↵
        ,YY(4),L4(4)];
331     pointsL4A=[pointL4A' pointL4B' pointL4C' pointL4D'];
332     fill3(pointsL4A(1,:),pointsL4A(2,:),pointsL4A(3:,:), 'c')
333     grid on; hold on; alpha(0.3)
334     pointL5A = [XX(1)+x5(k),YY(1),L5(1)]; pointL5B = [XX(2)+x5(k),YY(2),L5↵
        (2)]; pointL5C = [XX(3)+x5(k),YY(3),L5(3)]; pointL5D = [XX(4)+x5(k)↵
        ,YY(4),L5(4)];
335     pointsL5A=[pointL5A' pointL5B' pointL5C' pointL5D'];
336     fill3(pointsL5A(1,:),pointsL5A(2,:),pointsL5A(3:,:), 'c')
337     grid on; hold on; alpha(0.3)
338     plot3([x1(k) 5+x1(k) 10+x1(k)], [0 0 0], [y1(k) y1(k) y1(k)], 'Color','r'↵
        , 'LineWidth',kk)
```



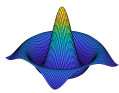
9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
339 hold on
340 plot3([x2(k) 5+x2(k) 10+x2(k)], [0 0 0], [y2(k) y2(k) y2(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
341 plot3([x3(k) 5+x3(k) 10+x3(k)], [0 0 0], [y3(k) y3(k) y3(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
342 plot3([x4(k) 5+x4(k) 10+x4(k)], [0 0 0], [y4(k) y4(k) y4(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
343 plot3([x5(k) 5+x5(k) 10+x5(k)], [0 0 0], [y5(k) y5(k) y5(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
344 plot3([x1(k) 5+x1(k) 10+x1(k)], [5 5 5], [y1(k) y1(k) y1(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
345 plot3([x2(k) 5+x2(k) 10+x2(k)], [5 5 5], [y2(k) y2(k) y2(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
346 plot3([x3(k) 5+x3(k) 10+x3(k)], [5 5 5], [y3(k) y3(k) y3(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
347 plot3([x4(k) 5+x4(k) 10+x4(k)], [5 5 5], [y4(k) y4(k) y4(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
348 plot3([x5(k) 5+x5(k) 10+x5(k)], [5 5 5], [y5(k) y5(k) y5(k)], 'Color', 'r'↵
    , 'LineWidth', kk)
349 plot3([x1(k) 5+x1(k) 10+x1(k)], [10 10 10], [y1(k) y1(k) y1(k)], 'Color', ↵
    'r', 'LineWidth', kk)
350 plot3([x2(k) 5+x2(k) 10+x2(k)], [10 10 10], [y2(k) y2(k) y2(k)], 'Color', ↵
    'r', 'LineWidth', kk)
351 plot3([x3(k) 5+x3(k) 10+x3(k)], [10 10 10], [y3(k) y3(k) y3(k)], 'Color', ↵
    'r', 'LineWidth', kk)
352 plot3([x4(k) 5+x4(k) 10+x4(k)], [10 10 10], [y4(k) y4(k) y4(k)], 'Color', ↵
    'r', 'LineWidth', kk)
353 plot3([x5(k) 5+x5(k) 10+x5(k)], [10 10 10], [y5(k) y5(k) y5(k)], 'Color', ↵
    'r', 'LineWidth', kk)
354 plot3([x1(k) x1(k)], [0 10], [4 4], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
355 plot3([5+x1(k) 5+x1(k)], [0 10], [4 4], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
356 plot3([10+x1(k) 10+x1(k)], [0 10], [4 4], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
357 plot3([x2(k) x2(k)], [0 10], [7 7], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
358 plot3([5+x2(k) 5+x2(k)], [0 10], [7 7], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
359 plot3([10+x2(k) 10+x2(k)], [0 10], [7 7], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
360 plot3([x3(k) x3(k)], [0 10], [10 10], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
361 plot3([5+x3(k) 5+x3(k)], [0 10], [10 10], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
362 plot3([10+x3(k) 10+x3(k)], [0 10], [10 10], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
363 plot3([x4(k) x4(k)], [0 10], [13 13], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
364 plot3([5+x4(k) 5+x4(k)], [0 10], [13 13], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
365 plot3([10+x4(k) 10+x4(k)], [0 10], [13 13], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
366 plot3([x5(k) x5(k)], [0 10], [16 16], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
367 plot3([5+x5(k) 5+x5(k)], [0 10], [16 16], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
368 plot3([10+x5(k) 10+x5(k)], [0 10], [16 16], 'Color', 'r', 'LineWidth', kk)
369 plot3([0 x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], [5 5+x1(k)], [0 0], [0 y1(k)], [10 10+x1(↵
    k)], [0 0], [0 y1(k)], 'Color', 'b', 'LineWidth', kk)
370 plot3([x1(k) x2(k)], [0 0], [y1(k) y2(k)], [5+x1(k) 5+x2(k)], [0 0], [y1(k)↵
    y2(k)], [10+x1(k) 10+x2(k)], [0 0], [y1(k) y2(k)], 'Color', 'b', '↵
    LineWidth', kk)
371 plot3([x2(k) x3(k)], [0 0], [y2(k) y3(k)], [5+x2(k) 5+x3(k)], [0 0], [y2(k)↵
    y3(k)], [10+x2(k) 10+x3(k)], [0 0], [y2(k) y3(k)], 'Color', 'b', '↵
    LineWidth', kk)
372 plot3([x3(k) x4(k)], [0 0], [y3(k) y4(k)], [5+x3(k) 5+x4(k)], [0 0], [y3(k)↵
    y4(k)], [10+x3(k) 10+x4(k)], [0 0], [y3(k) y4(k)], 'Color', 'b', '↵
    LineWidth', kk)
373 plot3([x4(k) x5(k)], [0 0], [y4(k) y5(k)], [5+x4(k) 5+x5(k)], [0 0], [y4(k)↵
    y5(k)], [10+x4(k) 10+x5(k)], [0 0], [y4(k) y5(k)], 'Color', 'b', '↵
```



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
LineWidth',kk)
374 plot3([0 x1(k)], [5 5], [0 y1(k)], [5 5+x1(k)], [5 5], [0 y1(k)], [10 10+x1(k) ←
    k)], [5 5], [0 y1(k)], 'Color', 'b', 'LineWidth',kk)
375 plot3([x1(k) x2(k)], [5 5], [y1(k) y2(k)], [5+x1(k) 5+x2(k)], [5 5], [y1(k) ←
    y2(k)], [10+x1(k) 10+x2(k)], [5 5], [y1(k) y2(k)], 'Color', 'b', '←
    LineWidth',kk)
376 plot3([x2(k) x3(k)], [5 5], [y2(k) y3(k)], [5+x2(k) 5+x3(k)], [5 5], [y2(k) ←
    y3(k)], [10+x2(k) 10+x3(k)], [5 5], [y2(k) y3(k)], 'Color', 'b', '←
    LineWidth',kk)
377 plot3([x3(k) x4(k)], [5 5], [y3(k) y4(k)], [5+x3(k) 5+x4(k)], [5 5], [y3(k) ←
    y4(k)], [10+x3(k) 10+x4(k)], [5 5], [y3(k) y4(k)], 'Color', 'b', '←
    LineWidth',kk)
378 plot3([x4(k) x5(k)], [5 5], [y4(k) y5(k)], [5+x4(k) 5+x5(k)], [5 5], [y4(k) ←
    y5(k)], [10+x4(k) 10+x5(k)], [5 5], [y4(k) y5(k)], 'Color', 'b', '←
    LineWidth',kk)
379 plot3([0 x1(k)], [10 10], [0 y1(k)], [5 5+x1(k)], [10 10], [0 y1(k)], [10 ←
    10+x1(k)], [10 10], [0 y1(k)], 'Color', 'b', 'LineWidth',kk)
380 plot3([x1(k) x2(k)], [10 10], [y1(k) y2(k)], [5+x1(k) 5+x2(k)], [10 10], [←
    y1(k) y2(k)], [10+x1(k) 10+x2(k)], [10 10], [y1(k) y2(k)], 'Color', 'b', ←
    'LineWidth',kk)
381 plot3([x2(k) x3(k)], [10 10], [y2(k) y3(k)], [5+x2(k) 5+x3(k)], [10 10], [←
    y2(k) y3(k)], [10+x2(k) 10+x3(k)], [10 10], [y2(k) y3(k)], 'Color', 'b', ←
    'LineWidth',kk)
382 plot3([x3(k) x4(k)], [10 10], [y3(k) y4(k)], [5+x3(k) 5+x4(k)], [10 10], [←
    y3(k) y4(k)], [10+x3(k) 10+x4(k)], [10 10], [y3(k) y4(k)], 'Color', 'b', ←
    'LineWidth',kk)
383 plot3([x4(k) x5(k)], [10 10], [y4(k) y5(k)], [5+x4(k) 5+x5(k)], [10 10], [←
    y4(k) y5(k)], [10+x4(k) 10+x5(k)], [10 10], [y4(k) y5(k)], 'Color', 'b', ←
    'LineWidth',kk)
384 fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
385 fill3([4.25 4.25 5.75 5.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
386 fill3([9.25 9.25 10.75 10.75], [-0.75 0.75 0.75 -0.75], [0 0 0 0], 'g')
387 fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75], [4.25 5.75 5.75 4.25], [0 0 0 0], 'g')
388 fill3([4.25 4.25 5.75 5.75], [4.25 5.75 5.75 4.25], [0 0 0 0], 'g')
389 fill3([9.25 9.25 10.75 10.75], [4.25 5.75 5.75 4.25], [0 0 0 0], 'g')
390 fill3([-0.75 -0.75 0.75 0.75], [9.25 10.75 10.75 9.25], [0 0 0 0], 'g')
391 fill3([4.25 4.25 5.75 5.75], [9.25 10.75 10.75 9.25], [0 0 0 0], 'g')
392 fill3([9.25 9.25 10.75 10.75], [9.25 10.75 10.75 9.25], [0 0 0 0], 'g')
393 axis equal
394 axis([-7.5 22.5 -1 16 0 16.05])
395 drawnow
396 pause(0.02)
397 hold off
398 end
399 % Cálculo para cortante máximo
400 fc=K(1:5,1:5)*[y(:,1)'; y(:,2)'; y(:,3)'; y(:,4)'; y(:,5)'];
401 for i=1:length(y(:,1))
402     calc2(i)=sum(fc(:,i));
403 end
404 if abs(min((calc2)))>abs(max((calc2)))
405     [a,ub]=min(calc2);
406 else
407     [a,ub]=max(calc2);
408 end
409 de(1)=y(ub,1);
410 de(2)=y(ub,2);
411 de(3)=y(ub,3);
```

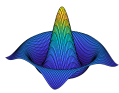


9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

```
412 de(4)=y(ub,4);
413 de(5)=y(ub,5);
414 f=K(1:5,1:5)*abs(de)';
415 f(1)=sum(f);
416 for i=1:4
417     f(i+1)=sum(f(i+1:end,1));
418 end
419 % Fuerzas Cortantes
420 figure('Name','Fuerzas Cortantes','NumberTitle','off','Position',[625 ←
    100 575 750])
421 set(gca,'Color','w')
422 set(gcf,'Color','w')
423 fill([0 f(1) f(1) f(2) f(2) f(3) f(3) f(4) f(4) f(5) f(5) 0],[0 0 1 1 2 ←
    2 3 3 4 4 5 5],'b')
424 alpha(0.4)
425 title('Fuerza Cortante','FontName','Century','FontSize',20)
426 xlabel('Fuerza Cortante (kN)','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
427 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
428 hleg=legend('Fuerza Cortante','Location','NorthEast');
429 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
430 hold on
431 grid on
432 set(gca,'GridAlpha',0.40);
433 % Momentos flexionantes
434 figure('Name','Momentos flexionantes','NumberTitle','off','Position'←
    ,[625 100 575 750])
435 set(gca,'Color','w')
436 set(gcf,'Color','w')
437 m(5)=f(5)*3;
438 m(4)=m(5)+f(4)*3;
439 m(3)=m(4)+f(3)*3;
440 m(2)=m(3)+f(2)*3;
441 m(1)=m(2)+f(1)*4;
442 fill([0 m(1) m(2) m(3) m(4) m(5) 0],[0 0 1 2 3 4 5],'r')
443 alpha(0.4)
444 title('Momento flexionante','FontName','Century','FontSize',20)
445 xlabel('Momento flexionante (kN-m)','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
446 ylabel('Número de piso','FontSize',20,'FontName','Century','FontWeight','normal')
447 hleg=legend('Momento Flexionante','Location','NorthEast');
448 set(hleg,'FontAngle','normal','FontName','Century','FontSize',12)
449 hold on
450 grid on
451 set(gca,'GridAlpha',0.40);
```

Resultados:

La gráfica de la excitación sísmica considerada (figura 9.4). Los valores numéricos en formato tabular de los historiales de respuesta de desplazamientos y de velocidades (figura 9.5). Un simulador visual de los desplazamientos ocasionados en el modelo tridimensional en tiempo real (figura 9.6). La representación gráfica de los historiales de respuesta de desplazamientos y velocidades (figura 9.7). La representación gráfica de los historiales de aceleraciones (figura 9.8). La representación gráfica de derivas de entrepiso, fuerzas cortantes



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

y momentos flexionantes (figura 9.9).

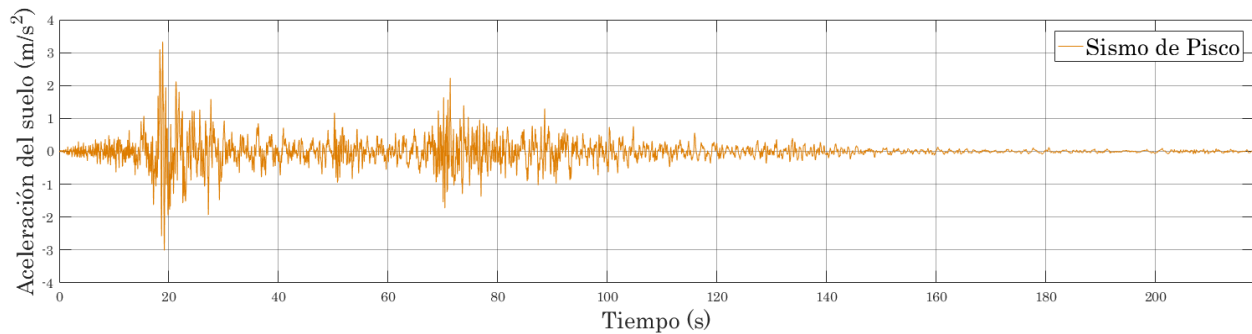


Figura 9.4: Gráfica Tiempo vs Aceleración del suelo.

t	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
0	1.6021e-24	1.1333e-23	-4.0752e-24	-5.4903e-24	-5.6164e-24	0	0	0	0
0.0100	1.6603e-07	1.9122e-07	1.8355e-07	1.8367e-07	1.8389e-07	0	0	0	0
0.0200	8.9847e-08	1.7764e-07	1.7270e-07	1.6200e-07	1.6391e-07	0	0	0	0
0.0300	-4.5423e-07	-4.3913e-07	-3.8093e-07	-3.9893e-07	-4.0578e-07	0	0	0	0
0.0400	-1.0421e-06	-1.3326e-06	-1.2214e-06	-1.1899e-06	-1.2192e-06	0	0	0	0
0.0500	-1.4004e-06	-2.1175e-06	-2.0890e-06	-1.9631e-06	-1.9827e-06	0	0	0	0
0.0600	-1.8077e-06	-2.9613e-06	-3.1695e-06	-2.9944e-06	-2.9224e-06	0	0	0	0
0.0700	-2.7472e-06	-4.4399e-06	-4.9583e-06	-4.8322e-06	-4.6111e-06	0	0	0	0
0.0800	-4.5015e-06	-7.0952e-06	-7.9562e-06	-7.9312e-06	-7.5909e-06	0	0	0	0
0.0900	-7.0064e-06	-1.1110e-05	-1.2434e-05	-1.2492e-05	-1.2119e-05	0	0	0	0
0.1000	-9.6988e-06	-1.5964e-05	-1.8074e-05	-1.8212e-05	-1.7858e-05	0	0	0	0
0.1100	-1.1564e-05	-2.0324e-05	-2.3772e-05	-2.4129e-05	-2.3764e-05	0	0	0	0

Figura 9.5: Historiales de desplazamientos, velocidades y aceleraciones en forma tabular.

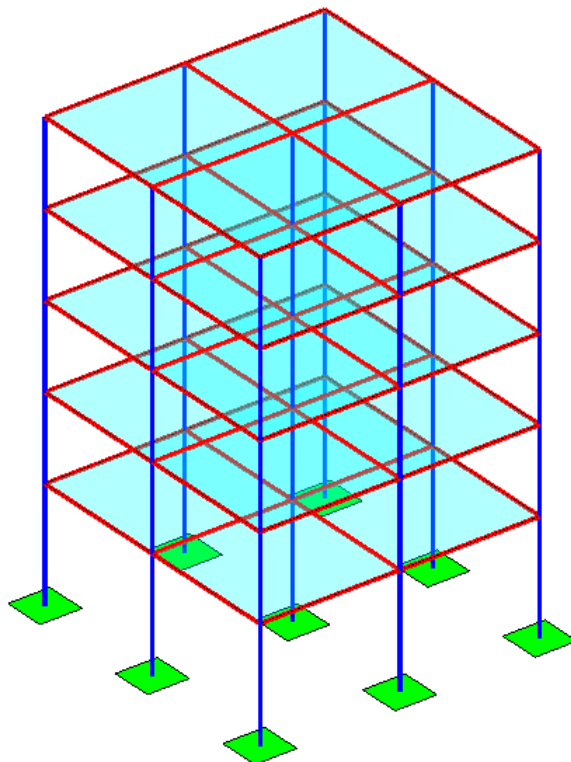
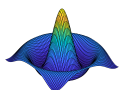


Figura 9.6: Modelo del edificio tridimensional.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

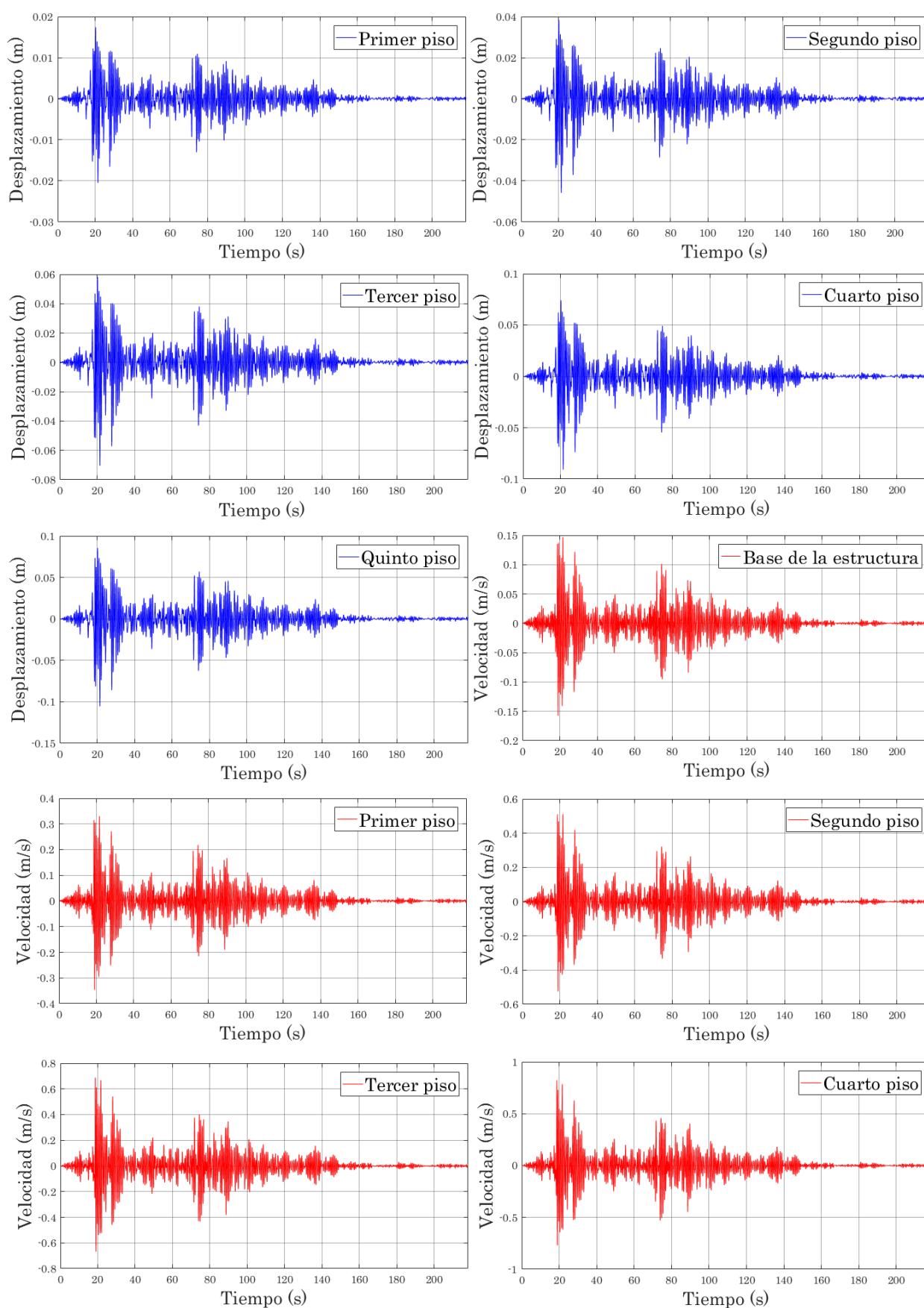
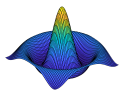


Figura 9.7: Historiales de desplazamientos y velocidades.



9.4. Planteamiento matricial de un análisis pseudo-tridimensional

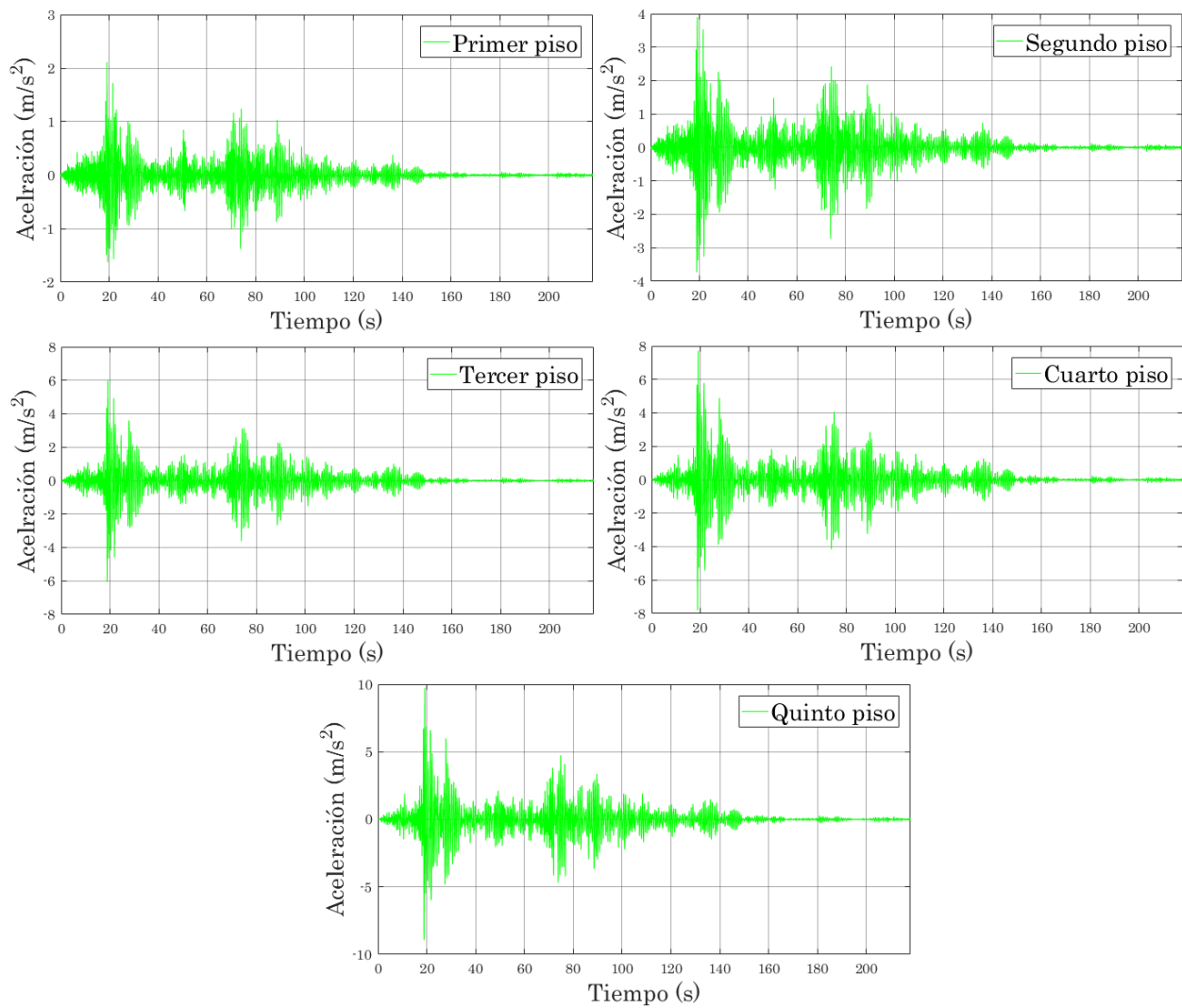


Figura 9.8: Historiales de aceleraciones.

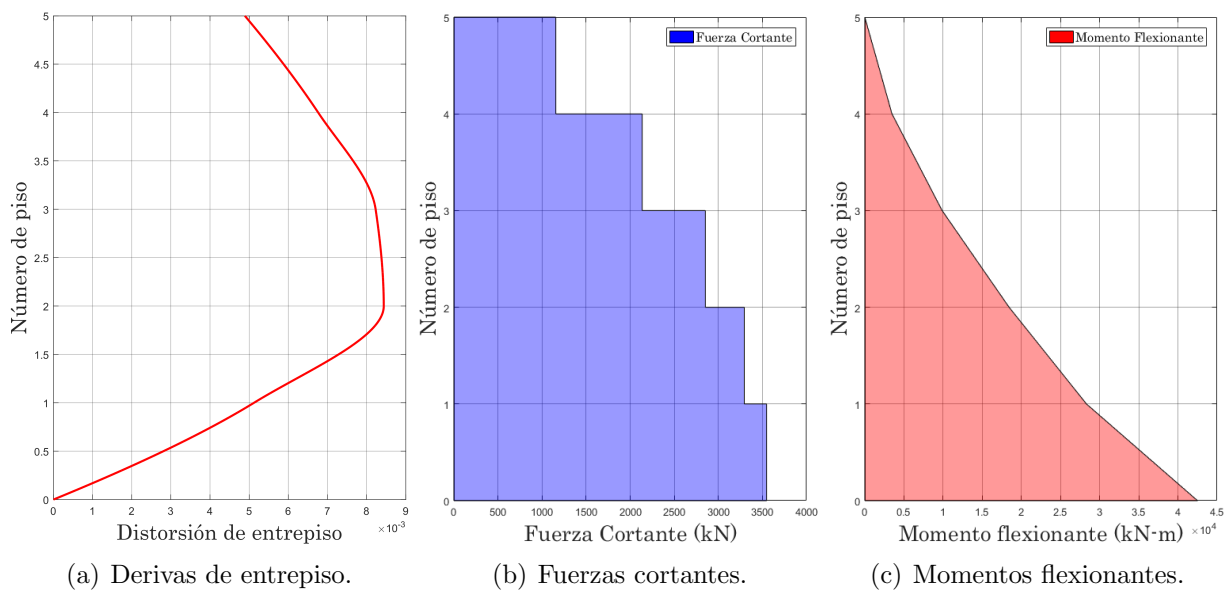
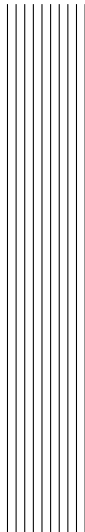
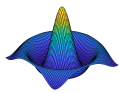
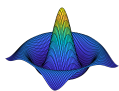


Figura 9.9: Derivs de entrepiso, fuerzas cortantes y momentos flexionantes.

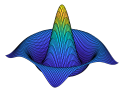


Bibliografía

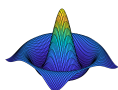
- [Aguiar et al., 2008] Aguiar, R., Almazán, J., Dechent, P., and Suárez, V. (2008). *Aisladores de Base Elastómericos y FPS*. CEINCI-ESPE.
- [Bazán and Meli, 1999] Bazán, E. and Meli, R. (1999). *Diseño Sísmico de Edificios*. Limusa.
- [Chopra, 2012] Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall.
- [Colunga, 2007] Colunga, A. T. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. Limusa.
- [Falconí, 2004] Falconí, R. A. (2004). *Análisis Matricial de Estructuras*. CEINCI-ESPE.
- [Falconí, 2008] Falconí, R. A. (2008). *Análisis Sísmico de Edificios*. CEINCI-ESPE.
- [Falconí, 2012] Falconí, R. A. (2012). *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB*. CEINCI-ESPE.
- [Ghali et al., 2009] Ghali, A., Neville, A., and Brown, T. (2009). *Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach*. Spon Press.
- [Hibbeler, 2012] Hibbeler, R. C. (2012). *Structural Analysis*. Prentice Hall.
- [Humar, 2002] Humar, J. L. (2002). *Dynamics of Structures*. A.A. Balkema.
- [Jain, 2016] Jain, A. K. (2016). *Dynamics of Structures with Matlab applications*. PEARSON.
- [Kassimali, 2010] Kassimali, A. (2010). *Structural Analysis*. Cengage Learning.
- [Magrab et al., 2011] Magrab, E. B., Azarm, S., Balachandran, B., Duncan, J. H., Herold, K. E., and Walsh, G. C. (2011). *An Engineer's Guide to MATLAB*. Pearson.
- [McGuire et al., 2012] McGuire, W., Gallagher, R. H., and Ziemian, R. D. (2012). *Matrix Structural Analysis*. Wiley.



- [Nakamura, 1997] Nakamura, S. (1997). *Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab*. Prentice Hall.
- [Paz, 2002] Paz, M. (2002). *Dinámica Estructural: Teoría y Cálculo*. Reverté.
- [Przemieniecki, 1985] Przemieniecki, J. S. (1985). *Theory of Matrix Structural Analysis*. Dover Publications.
- [Wakabayashi and Romero, 1997] Wakabayashi, M. and Romero, E. M. (1997). *Diseño de estructuras sismorresistentes*. McGraw-Hill.



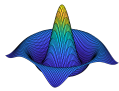
ANEXOS



A. Sismo de Pisco del 15/08/2007

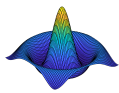
El presente anexo corresponde al registro de tiempo-aceleraciones del suelo utilizadas en el presente libro. Dicho registro es el sismo de Pisco (Ica - Perú) del 15/08/2007 y puede obtenerse en la página del CISMID: <http://www.cismid-uni.org/>.

Sismo de Pisco			
Tiempo (s)	Componente E - W (cm/s ²)	Componente N - S (cm/s ²)	Componente E - W (cm/s ²)
0.00	-0.2015	-0.7075	1.3257
0.01	0.1538	0.3101	-0.6201
0.02	-0.48	0.6862	-2.0637
0.03	-0.6667	0.2348	0.2742
0.04	0.3037	-0.1436	3.5169
0.05	1.5446	0.1427	2.1567
0.06	2.2671	0.7676	-3.3594
0.07	2.7514	1.3004	-6.9012
0.08	3.1238	1.5955	-5.6158
0.09	2.7267	1.3151	-3.0725
0.10	1.5247	0.17	-2.1254
0.11	0.8009	-1.1858	-0.3058
0.12	1.425	-1.5854	4.6114
0.13	2.4376	-0.9655	9.311
0.14	2.3842	-0.5428	9.5627
0.15	1.2849	-1.0489	6.6957
0.16	0.3216	-1.76	4.7735
0.17	0.2111	-1.6748	3.8459
0.18	0.7985	-0.7457	1.0965
0.19	1.7166	0.5075	-2.8587
0.20	2.5313	1.7574	-4.2476
0.21	2.6165	2.7313	-2.4347
0.22	1.7325	3.0292	-0.8307
0.23	0.5102	2.6111	-0.9497
0.24	-0.2524	1.9677	-0.3882
0.25	-0.5005	1.4904	1.9316
0.26	-0.6489	1.1618	3.0501
0.27	-0.859	1.0044	0.7696
0.28	-1.1875	1.1696	-2.5559
0.29	-1.9689	1.4221	-3.6291
0.30	-3.2941	1.2767	-2.5607
0.31	-4.4384	0.8709	-1.0468
0.32	-4.5722	0.9611	0.83
0.33	-3.8392	1.796	2.9478
0.34	-3.0559	2.7009	2.9908
0.35	-2.5381	2.9997	-0.3198
0.36	-1.9157	2.621	-3.6895
Continúa en la siguiente página ...			



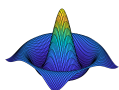
ANEXO A. SISMO DE PISCO DEL 15/08/2007

Tiempo (s)	Componente E - W (cm/s ²)	Componente N - S (cm/s ²)	Componente E - W (cm/s ²)
0.37	-0.9683	1.633	-2.8672
0.38	0.0568	0.0659	1.2707
0.39	0.9295	-1.5044	4.0572
0.40	1.6174	-2.0971	3.8074
0.41	1.9756	-1.5071	3.286
0.42	1.8285	-0.6089	4.377
0.43	1.4097	-0.1125	5.3335
0.44	1.197	0.218	4.4132
0.45	1.2227	0.7348	2.8162
0.46	1.0026	1.1566	2.2879
0.47	0.2753	1.1743	2.3295
0.48	-0.566	1.0522	1.5487
0.49	-0.9181	1.0555	2.00E-04
0.50	-0.581	0.9421	-1.1829
0.51	0.1463	0.5728	-1.0153
0.52	0.7473	0.3943	1.2731
0.53	0.8165	0.7405	5.5319
0.54	0.3127	1.2292	9.238
0.55	-0.4383	1.4209	8.9413
0.56	-1.0485	1.541	4.4339
0.57	-1.3128	1.963	-0.5275
0.58	-1.1529	2.4508	-2.9957
0.59	-0.6163	2.5167	-4.2642
0.60	-0.1031	2.1804	-7.0255
0.61	-0.2494	1.86	-11.3773
0.62	-1.2015	1.8084	-15.7597
0.63	-2.1963	2.0543	-19.7742
0.64	-2.2588	2.5637	-23.3478
0.65	-1.2579	3.1027	-24.5998
0.66	0.0089	3.3039	-21.5657
0.67	0.7034	3.1915	-15.2799
0.68	0.6795	3.2338	-8.3387
0.69	0.4253	3.5286	-0.9222
0.70	0.4834	3.3686	8.8427
0.71	0.865	2.0453	20.6313
0.72	0.991	-0.2103	30.9793
0.73	0.421	-2.4298	37.1759
0.74	-0.3979	-3.8082	39.5572
0.75	-0.5856	-4.1929	39.0181
0.76	-0.0948	-3.9786	34.5607
0.77	0.1726	-3.7008	24.8433
0.78	-0.2043	-3.4565	10.7723
0.79	-0.4769	-2.6836	-4.7253
0.80	-0.0706	-0.8892	-18.5356
0.81	0.278	1.4481	-28.0271
0.82	-0.254	3.2523	-31.0101
0.83	-0.9341	4.116	-26.5622
0.84	-0.4327	4.535	-16.0408
0.85	0.9358	4.8488	-2.7834
0.86	1.4929	4.7393	9.4829
0.87	0.7675	3.9568	18.62
0.88	0.1733	2.746	25.2978
0.89	0.6338	1.3203	31.7883
0.90	1.0673	-0.2422	38.3262
0.91	0.1889	-1.3186	41
0.92	-1.4118	-0.9913	35.0347
0.93	-2.2607	0.4472	20.5767
0.94	-2.2258	1.1785	3.664
0.95	-2.3141	-0.1377	-9.2527
0.96	-2.6061	-2.709	-16.4835
0.97	-1.8256	-4.6969	-20.2934
0.98	0.859	-5.293	-22.7813
0.99	4.646	-4.8771	-24.1418
1.00	7.9975	-3.7805	-23.8685
1.01	9.9504	-2.0812	-21.5995
1.02	10.2959	-0.3941	-16.8144
1.03	9.2249	0.3433	-9.4145
1.04	7.2472	0.1399	-1.233
1.05	4.9783	0.1873	4.2277
1.06	2.6332	1.4186	4.8142
1.07	0.1097	3.2921	2.4949
1.08	-2.1641	4.3598	2.3636
1.09	-3.0139	3.7971	8.2487
1.10	-1.732	2.1149	19.1099
Continúa en la siguiente página ...			



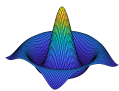
ANEXO A. SISMO DE PISCO DEL 15/08/2007

Tiempo (s)	Componente E - W (cm/s ²)	Componente N - S (cm/s ²)	Componente E - W (cm/s ²)
1.11	0.7593	0.5314	29.7904
1.12	2.5956	-0.0653	35.205
1.13	2.8468	0.4603	33.6371
1.14	2.1915	1.7246	26.4148
1.15	1.5902	3.0733	15.682
1.16	0.8585	3.6882	3.4696
1.17	-0.9032	3.1022	-7.6749
1.18	-3.721	1.9931	-14.8041
1.19	-6.3584	1.9241	-16.2253
1.20	-7.7919	3.6165	-12.6844
1.21	-8.4668	5.7981	-6.418
1.22	-9.4304	6.5425	0.7472
1.23	-10.5003	5.5536	7.9192
1.24	-10.1797	4.2289	14.014
1.25	-7.5878	3.5384	17.0814
1.26	-3.7435	2.9354	15.5842
1.27	-0.4994	1.6345	10.0756
1.28	1.2089	-0.0749	2.5575
1.29	1.5442	-1.3567	-5.9562
1.30	0.8706	-1.9075	-15.8138
1.31	-0.3761	-1.9684	-25.8959
1.32	-1.2218	-1.94	-32.2422
1.33	-0.6807	-2.4971	-31.7305
1.34	1.0582	-4.3054	-26.1698
1.35	2.8495	-6.8783	-19.963
1.36	4.2881	-8.4038	-13.9906
1.37	6.3074	-7.7181	-5.1589
1.38	9.5503	-6.0874	7.2674
1.39	12.9357	-5.9477	18.4622
1.40	14.6839	-7.8641	23.1101
1.41	14.3139	-9.6986	20.6975
1.42	12.7467	-9.1138	13.3956
1.43	10.7134	-6.225	1.7716
1.44	8.1173	-3.3122	-13.7017
1.45	5.111	-2.3122	-28.9321
1.46	2.7867	-3.1126	-38.3809
1.47	2.1003	-4.2163	-40.479
1.48	2.5507	-4.5568	-37.4161
1.49	2.6384	-4.2914	-30.225
1.50	1.6337	-3.8942	-18.1515
1.51	0.3763	-2.95	-3.1286
1.52	0.0714	-0.3667	9.2958
1.53	0.594	4.1429	15.1085
1.54	0.5159	9.2126	15.2236
1.55	-1.019	12.8198	12.6862
1.56	-2.9399	14.0055	9.1655
1.57	-3.3907	13.3092	5.3871
1.58	-2.0615	11.6339	2.3821
1.59	-0.5485	9.1864	0.5271
1.60	-0.2124	5.7069	-1.0298
1.61	-0.6077	1.2662	-2.8653
1.62	-0.5757	-3.5909	-4.6608
1.63	0.0828	-8.1516	-6.5045
1.64	1.0231	-11.4116	-8.8126
1.65	2.6315	-11.9954	-10.5587
1.66	5.4283	-9.2581	-9.9637
1.67	8.5512	-4.6574	-7.465
1.68	10.4094	-0.9943	-5.3293
1.69	10.8387	0.2114	-3.6894
1.70	10.9954	-0.3185	-0.1225
1.71	10.9607	-1.662	5.7614
1.72	9.4003	-4.1403	10.7805
1.73	6.2929	-7.5346	12.7968
1.74	3.9034	-9.5396	13.0726
1.75	3.5629	-8.3118	11.7343
1.76	3.2721	-5.6435	5.2523
1.77	0.641	-4.8571	-7.2871
1.78	-2.9796	-5.8177	-18.5968
1.79	-3.8538	-5.1195	-19.3992
1.80	-1.0064	-1.7037	-9.3771
1.81	2.423	1.0081	2.5426
1.82	3.2433	0.0635	8.4626
1.83	1.4818	-2.8943	8.0904
1.84	-1.0207	-4.6652	5.5475
Continúa en la siguiente página ...			



ANEXO A. SISMO DE PISCO DEL 15/08/2007

Tiempo (s)	Componente E - W (cm/s ²)	Componente N - S (cm/s ²)	Componente E - W (cm/s ²)
1.85	-3.2856	-5.2399	4.4348
1.86	-5.2991	-6.7238	7.2096
1.87	-6.8305	-9.0983	15.2798
1.88	-7.4686	-9.9877	27.0663
1.89	-7.1804	-7.9873	37.8069
1.90	-6.0435	-3.9029	42.8427
1.91	-4.0586	0.7645	40.0189
1.92	-1.7566	4.5694	28.9838
1.93	-0.1956	6.0825	10.9829
1.94	0.2073	5.1916	-9.5027
1.95	0.1	3.88	-25.6287
1.96	0.0513	3.8234	-33.087
1.97	-0.1181	3.9708	-33.2607
1.98	-0.4968	2.4721	-30.319
1.99	-0.7135	0.0056	-26.3491
2.00	-0.9233	-1.2343	-20.535
2.01	-1.8424	-1.0377	-11.9034
2.02	-3.0295	-0.9378	-1.1935
2.03	-2.5701	-0.9828	9.6714
2.04	0.3253	0.3421	18.8321
2.05	3.6506	3.032	25.1984
2.06	4.96	5.1812	28.4366
2.07	4.3844	5.8323	28.4425
2.08	3.7975	5.6083	25.2825
2.09	3.922	4.4508	20.1269
2.10	4.0206	1.6388	15.2087
2.11	3.7825	-1.4905	11.1388
2.12	3.5964	-1.7767	4.8466
2.13	3.2551	1.7939	-7.1164
2.14	2.2164	6.6664	-22.4613
2.15	1.0528	10.0113	-32.7764
2.16	0.9139	11.2067	-30.9942
2.17	1.5408	10.5658	-18.0456
2.18	1.4804	8.29	-1.171
2.19	0.3121	5.6282	12.4672
2.20	-1.0606	4.5188	19.072
2.21	-2.4219	4.8786	17.7938
2.22	-4.5996	4.4347	10.7798
2.23	-7.3526	2.1732	3.3471
2.24	-8.8204	-0.3676	0.79
2.25	-7.9408	-2.0632	3.7888
2.26	-5.8555	-3.7704	8.551
2.27	-4.0563	-5.8572	11.7386
2.28	-2.6364	-7.1011	13.0156
2.29	-1.3175	-7.5815	12.0405
2.30	-0.6681	-9.6891	5.98
2.31	-0.9863	-14.1473	-7.1065
2.32	-1.1752	-17.7016	-23.6884
2.33	-0.1369	-17.2045	-36.8722
2.34	1.5585	-13.7171	-43.5273
2.35	2.6306	-10.1087	-46.6973
2.36	2.918	-6.9178	-49.7003
2.37	3.0358	-3.5446	-50.2022
2.38	2.9861	-1.5384	-42.8261
2.39	2.4843	-3.0933	-26.9874
2.40	2.0885	-7.0997	-9.4425
2.41	2.5221	-9.7991	1.8254
2.42	3.0926	-9.0891	4.9559
2.43	2.1281	-5.8911	5.1238
2.44	-0.9491	-1.9432	9.6458
2.45	-4.9681	1.3142	22.497
2.46	-8.3834	2.3181	41.1721
2.47	-10.3931	0.6377	56.8578
2.48	-10.7586	-1.3305	59.3203
2.49	-9.4985	-0.3269	44.9856
2.50	-6.9987	3.6948	20.9757
2.51	-3.85	7.1825	-0.6396
2.52	-0.524	6.9661	-13.3279
2.53	2.383	3.4069	-19.8268
2.54	3.883	-0.2338	-25.6966
2.55	3.2826	-0.3796	-31.5809
2.56	1.0466	4.3012	-33.1233
2.57	-1.5777	11.2779	-26.7433
2.58	-3.6211	15.4267	-13.4867
Continúa en la siguiente página ...			



ANEXO A. SISMO DE PISCO DEL 15/08/2007

Tiempo (s)	Componente E - W (cm/s ²)	Componente N - S (cm/s ²)	Componente E - W (cm/s ²)
2.59	-4.5853	13.5282	2.089
2.60	-4.0148	7.4934	15.009
2.61	-1.747	2.1184	22.1261
2.62	1.5388	0.2113	23.172
2.63	4.7667	1.0236	20.391
2.64	7.3645	2.3995	16.5083
2.65	9.0963	2.6575	12.6181
2.66	9.3177	1.0865	8.0584
2.67	7.389	-1.417	1.8796
2.68	3.8731	-2.544	-5.9869
2.69	0.4694	-1.1386	-14.2955
2.70	-1.4234	0.8921	-20.4102
2.71	-1.4657	1.0048	-21.521
2.72	0.2497	-0.2369	-17.4775
2.73	3.6913	0.0146	-12.1782
2.74	8.4249	2.6254	-10.4302
2.75	13.2278	5.2773	-12.8609
2.76	16.5142	5.5539	-15.0067
2.77	16.9838	3.101	-12.0174
2.78	14.1201	-1.408	-3.6797
2.79	8.7154	-7.1755	5.2442
2.80	2.8093	-12.5729	8.8426
2.81	-1.7279	-15.5952	4.5792
2.82	-4.7465	-15.9634	-4.2228
2.83	-7.3163	-15.2783	-9.9873
2.84	-9.6428	-14.387	-6.9716
2.85	-10.4528	-12.0731	2.6434
2.86	-8.9708	-7.132	9.6184
2.87	-6.7238	-0.4176	6.0241
2.88	-6.4598	5.957	-7.3971
2.89	-9.3511	10.2914	-22.4494
2.90	-13.8025	11.5668	-30.6385
2.91	-17.0584	9.5379	-28.1728
2.92	-17.6765	5.8225	-16.0208
2.93	-16.4154	3.942	1.6277
2.94	-15.0356	6.6242	18.4944
2.95	-14.5449	12.7199	28.4146
2.96	-14.6271	17.3793	28.5963
2.97	-14.4018	15.8203	20.9492
2.98	-13.2394	7.5101	10.0697
2.99	-10.8829	-2.9262	0.0802
3.00	-7.4599	-9.3602	-7.2849
3.02	-0.8457	-6.6444	-18.5558
3.03	0.7963	-5.4931	-24.009
3.04	1.8075	-7.2301	-25.0555
3.05	2.7891	-9.1738	-16.5788
3.06	3.5499	-8.6504	1.5301
3.07	4.0382	-5.5149	22.1657
3.08	5.196	-1.1874	35.9939
3.09	7.6319	2.9756	38.7182
3.10	9.9536	6.0153	33.0776
3.11	10.0878	7.5	24.426
3.12	8.3895	7.7815	15.6429
3.13	7.7779	7.1897	6.3857
3.14	10.0322	5.0805	-4.3658
3.15	13.2179	1.0393	-16.6232
3.16	13.8221	-3.1587	-29.7328
3.17	10.6312	-4.8417	-42.3022
3.18	5.5122	-4.2558	-50.8716
3.19	0.9894	-5.0327	-50.5254
3.20	-1.8872	-9.5489	-39.2274
3.21	-3.6583	-15.3553	-21.171
3.22	-5.5538	-17.8402	-3.479
3.23	-8.4354	-15.4827	10.7451
3.24	-11.797	-10.8718	23.9455
⋮	⋮	⋮	⋮
218.00	-2.1988	-1.5248	-0.4231
218.01	-1.1577	-1.0066	-0.2007
218.02	-0.3421	-0.1255	0.0157
218.03	-0.3353	0.1272	-0.0973
218.04	-0.6170	-0.2533	-0.2309
218.05	-0.6190	-0.4306	-0.1228
218.06	-0.4554	-0.1593	-0.0147

Tabla A.1: Registro de aceleraciones del sismo de Pisco.

ISBN: 978-612-00-7651-4

